

# Le théorème de Riemann-Roch et ses applications

**A. Lesfari**

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

Université Chouaïb Doukkali

B.P. 20, El-Jadida, Maroc.

E-mail : Lesfariahmed@yahoo.fr , lesfari@ucd.ac.ma

Abstract. The Riemann-Roch theorem is of utmost importance in the algebraic geometric theory of compact Riemann surfaces. It tells us how many linearly independent meromorphic functions there are having certain restrictions on their poles. The aim of this article is to present a simple direct proof of this theorem and explore some of its numerous consequences. We also give an analytic proof of the Riemann-Hurwitz formula. As an application, we compute the genus of some interesting algebraic curves.

AMS Subject Classification : 34M05, 34M45, 70H06.

Dans ce travail, nous allons étudier un des théorèmes les plus importants de la théorie des surfaces de Riemann compactes : le théorème de Riemann-Roch. Il s'agit d'un théorème d'existence efficace qui permet, entre autres, de déterminer le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant certaines restrictions sur leurs pôles. Le but de cet article est de donner une preuve élémentaire, constructive bien qu'un peu technique du théorème de Riemann-Roch. Nous mentionnons quelques conséquences de ce théorème et nous donnons également une preuve analytique de la formule de Riemann-Hurwitz. Elle exprime le genre d'une surface de Riemann à l'aide du nombre de ses points de ramifications et du nombre de ses feuillets. Nous montrons que cette formule fournit un moyen efficace pour déterminer le genre d'une surface de Riemann donnée. Plusieurs exemples intéressants seront étudiés.

## 1 Préliminaires

Nous commençons par des généralités sur les surfaces de Riemann compactes  $X$  ou courbes algébriques complexes. Ce sont des variétés analytiques

de dimension 1 complexe (2 réelle) munies d'atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. On les définit par une équation de la forme

$$F(w, z) \equiv p_0(z)w^n + p_1(z)w^{n-1} + \dots + p_n(z) = 0,$$

où  $F(w, z)$  est un polynôme à deux variables complexes  $w$  et  $z$ , de degré  $n$  en  $w$  et irréductible. Ici  $p_0(z) \neq 0$ ,  $p_1(z), \dots, p_n(z)$  sont des polynômes en  $z$ . La surface  $X$  est homéomorphe à un tore à  $g$  trous. Le nombre  $g$  s'appelle genre de la surface  $X$ .

Soient  $p$  un point de  $X$ ,  $\tau_p : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  un paramètre local en  $p$  (ou une uniformisante locale en  $p$ , i.e., une carte locale en  $p$  appliquant  $p$  sur 0) et  $f$  une fonction méromorphe au voisinage de  $p$ . L'ordre de  $f$  en  $p$ , est l'unique entier  $n$  tel que :  $f = \tau_p^n \cdot g$ , où  $g$  est holomorphe ne s'annulant pas en  $p$ . Dans le cas où  $f = 0$ , on choisit par convention  $n = +\infty$ . L'entier  $n$  dépend de  $p$  et de  $f$  et on le note  $\text{ord}_p f$ . On a

$$\text{ord}_p(f + g) \geq \inf(\text{ord}_p f, \text{ord}_p g),$$

et

$$\text{ord}_p fg = \text{ord}_p f + \text{ord}_p g.$$

Un diviseur sur une surface de Riemann  $X$  est une combinaison formelle du type

$$\mathcal{D} = \sum_{p \in X} n_p \cdot p = \sum_j n_j p_j, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

avec  $(p_j)$  une famille localement finie de points de  $X$ . Le diviseur  $\mathcal{D}$  est fini si son support est fini et ce sera toujours le cas si  $X$  est une surface de Riemann compacte. L'ensemble des diviseurs sur  $X$  est un groupe abélien noté  $\text{Div}(X)$ . L'addition des diviseurs est définie par l'addition des coefficients. Soit  $f \neq 0$ , une fonction méromorphe sur  $X$ . A cette fonction  $f$ , on fait correspondre un diviseur noté  $(f)$  en posant

$$(f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p f \cdot p,$$

où les  $\text{ord}_p f$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. En désignant par  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  les zéros de  $f$  de multiplicité  $n_1, \dots, n_l$  respectivement et par  $\beta_1, \dots, \beta_m$  les pôles de  $f$  de multiplicité  $p_1, \dots, p_m$  respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} (f) &= \sum_{j=1}^l n_j \alpha_j - \sum_{j=1}^m p_j \beta_j, \\ &= (\text{diviseur des zéros de } f) - (\text{diviseur des pôles de } f). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (fg) &= (f) + (g), \\ (f^{-1}) &= -(f), \\ (f) &= (g) \implies \frac{f}{g} = \text{constante}. \end{aligned}$$

Tout diviseur d'une fonction méromorphe est dit diviseur principal. L'ensemble des diviseurs principaux forme un sous-groupe  $\text{Div}^\circ(X)$  de  $\text{Div}(X)$ . Le groupe quotient  $\text{Div}(X)/\text{Div}^\circ(X) = \text{Pic}(X)$ , est le groupe de Picard de  $X$ . Le degré du diviseur  $\mathcal{D}$  est un entier noté  $\text{deg}\mathcal{D}$  et est défini par  $\text{deg}\mathcal{D} = \sum_j n_j$ . On dit qu'un diviseur  $\mathcal{D}$  est positif (ou effectif) et on note  $\mathcal{D} \geq 0$ , si les entiers  $n_j$  qui interviennent dans la somme sont positifs. Un diviseur  $\mathcal{D}_1$  est plus grand qu'un diviseur  $\mathcal{D}_2$  si  $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$  est positif. Deux diviseurs  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont dits linéairement équivalents (et on note  $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ ) si  $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$  est principal, i.e., si  $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = (f)$  où  $f$  est une fonction méromorphe. L'application

$$\text{deg} : \text{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \mathcal{D} \longmapsto \text{deg}(\mathcal{D}),$$

est un homomorphisme de groupe. Sur toute surface de Riemann compacte, une fonction méromorphe  $f \neq 0$  a le même nombre de zéros que des pôles, donc  $\text{deg}(f) = 0$ . Autrement dit, tout diviseur principal a le degré 0.

Si  $\mathcal{D} = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$  est un diviseur, on notera  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  l'ensemble des fonctions méromorphes  $f$  telles que :  $\text{ord}_p f + n_p \geq 0$ , pour tout  $p \in X$ . Autrement dit,

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f \text{ méromorphe sur } X : (f) + \mathcal{D} \geq 0\},$$

i.e., l'espace vectoriel des fonctions méromorphes  $f$  telles que :  $(f) + \mathcal{D} \geq 0$ . Si  $(f) + \mathcal{D}$  n'est  $\geq 0$  pour aucun  $f$ , on posera  $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = 0$ . Par exemple, si le diviseur  $\mathcal{D}$  est positif alors  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  est l'ensemble des fonctions holomorphes en dehors de  $\mathcal{D}$  et ayant au plus des pôles simples le long de  $\mathcal{D}$ . Notons que si  $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ , alors  $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1)$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(\mathcal{D}_2)$ , d'où  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_1) = \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_2)$ .

Une forme différentielle sur  $X$  s'écrit  $\omega = f(\tau)d\tau$ , où  $\tau$  est le paramètre local et  $f$  une fonction complexe de  $\tau$ . On dit que  $\omega$  est une différentielle abélienne si  $f(\tau)$  est une fonction méromorphe sur  $X$ , holomorphe si  $f(\tau)$  est une fonction holomorphe sur  $X$ , ayant un pôle d'ordre  $k$  ou un zéro d'ordre  $k$  en un point  $p$  si  $f(\tau)$  a un pôle d'ordre  $k$  ou un zéro d'ordre  $k$  en ce point. L'ensemble des différentielles holomorphes sur  $\mathcal{C}$  est de dimension  $g$ . On peut associer à chaque forme différentielle  $\omega$  un diviseur noté  $(\omega)$ . Si  $\omega = f d\tau_p$  avec  $f$  une fonction méromorphe sur  $X$  et  $\tau_p$  un paramètre local en  $p \in X$ , on définit l'ordre de  $\omega$  en  $p$  par  $\text{ord}_p \omega = \text{ord}_0 f$  et le diviseur  $(\omega)$  de  $\omega$  par  $(\omega) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p \omega \cdot p$ .

Si  $\mathcal{D} = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$  est un diviseur, on définit de façon analogue à  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ , l'espace linéaire  $\Omega(\mathcal{D})$  comme étant l'ensemble des formes différentielles méromorphes  $\omega$  sur  $X$  telles que :  $\text{ord}_p \omega + n_p \geq 0$ , pour tout  $p \in X$ . Autrement dit,

$$\Omega(\mathcal{D}) = \{\omega \text{ méromorphe sur } X : (\omega) + \mathcal{D} \geq 0\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des formes différentielles méromorphes  $\omega$  sur  $X$  telles que :  $(\omega) + \mathcal{D} \geq 0$ . Si  $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ , alors  $\Omega(\mathcal{D}_1)$  est isomorphe à  $\Omega(\mathcal{D}_2)$ , d'où  $\dim \Omega(\mathcal{D}_1) = \dim \Omega(\mathcal{D}_2)$ . Dans le cas où le diviseur  $\mathcal{D}$  est négatif, alors  $(\omega) + \mathcal{D} \geq 0$  est l'ensemble des formes différentielles qui n'ont pas de pôles

et qui ont des zéros au moins aux points de  $\mathcal{D}$ . Notons enfin qu'en vertu du théorème des résidus, on a  $\sum_{p \in X} \text{Res}(\omega) = 0$ , où  $\text{Res}(\omega)$  est le résidu en  $p$  de  $\omega$ , i.e., le coefficient de  $\frac{1}{z_p}$  dans le développement de  $f$  en série de Laurent.

Soit  $\mathcal{D}$  un diviseur sur une surface de Riemann compacte  $X$  et  $K$  un diviseur canonique sur  $X$ , i.e., le diviseur  $(\omega)$  d'une 1-forme méromorphe  $\omega \neq 0$  sur  $X$ . L'application

$$\psi : \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) \longrightarrow \Omega(-\mathcal{D}), \quad f \longmapsto f\omega, \quad (1)$$

est un isomorphisme. En effet, on a

$$\begin{aligned} (f\omega) = (f) + (\omega) &= (f) + K, \\ &\geq -(K - \mathcal{D}) + K, \\ &= -(-\mathcal{D}), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application  $\psi$  est bien définie. Cette dernière est injective, i.e., l'équation  $f\omega = g\omega$  entraîne  $f = g$ . Montrons que  $\psi$  est surjective. Soit  $\eta \in \Omega(-\mathcal{D})$ , d'où il existe une fonction méromorphe  $h$  sur  $X$  telle que :  $h\omega = \eta$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} (h) + K &= (h) + (\omega), \\ &= (h\omega), \\ &= (\eta) \geq -(-\mathcal{D}), \end{aligned}$$

d'où  $(h) \geq -(K - \mathcal{D})$ ,  $h \in \mathcal{L}(K - \mathcal{D})$  et par conséquent  $\psi$  est surjective.

## 2 Théorème de Riemann-Roch et formule de Riemann-Hurwitz

**THÉORÈME 1** (*de Riemann-Roch*) : Si  $X$  une surface de Riemann compacte et  $\mathcal{D}$  est un diviseur sur  $X$ , alors

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \text{deg} \mathcal{D} - g + 1, \quad (2)$$

où  $K$  est le diviseur canonique sur  $X$  et  $g$  est le genre de  $X$ . La formule (2) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \Omega(-\mathcal{D}) = \text{deg} \mathcal{D} - g + 1. \quad (3)$$

**Démonstration** : L'équivalence entre les formules (2) et (3) résulte immédiatement de l'isomorphisme (1). La preuve du théorème est immédiate dans le cas où  $\mathcal{D} = 0$  car  $\mathcal{L}(0)$  est l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $X$ . Or toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte est constante, donc  $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$ . En outre, on sait que la dimension de l'espace des

formes différentielles holomorphes sur  $X$  est le genre  $g$  de  $X$ , d'où le résultat. La preuve du théorème va se faire en plusieurs étapes :

*Étape 1* : Soit  $\mathcal{D}$  un diviseur positif. Autrement dit,

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^m m_k p_k, \quad n_k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k \in X.$$

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ . Au voisinage de  $p_k$ , on a

$$df = \left( \sum_{j=-n_k-1}^{\infty} c_j^k \tau^j \right) d\tau,$$

donc  $df$  est méromorphe. Plus précisément,  $df$  a un pôle d'ordre  $n_k + 1$  en  $p_k$ . Comme  $f$  est méromorphe, alors  $df$  ne peut pas avoir de pôle simple et dès lors son résidu est nul, i.e.,  $c_{-1}^k = 0$ . Soit  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  une base de cycles dans le groupe d'homologie  $H_1(X, \mathbb{Z})$  de telle façon que les indices d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent :

$$(a_i, a_i) = (b_i, b_i) = 0, \quad (a_i, b_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq g.$$

Posons

$$\eta = df - \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \eta_k^j. \quad (4)$$

D'où

$$\int_{a_i} \eta = \int_{a_i} df - \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \int_{a_i} \eta_k^j.$$

L'intégrale d'une différentielle exacte le long d'un chemin fermé étant nulle, donc  $\int_{a_i} df = 0$ . Rappelons (analyse harmonique) que si  $X$  est une surface de Riemann de genre  $g$ , alors pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $p \in X$ , il existe une différentielle holomorphe  $\eta$  sur  $X \setminus p$  telle que :

$$\eta = \left( \frac{1}{\tau^n} + o(\tau) \right) d\tau,$$

et en outre, on a  $\int_{a_i} \eta = 0$ . La forme  $\eta$  étant holomorphe, alors

$$\eta = c_1 \omega_1 + \dots + c_g \omega_g,$$

où  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  est une base de  $\Omega(X)$  et dès lors

$$\eta = c_1 \int_{a_i} \omega_1 + \dots + c_g \int_{a_i} \omega_g, \quad i = 1, \dots, g$$

Puisque la matrice

$$E = \left( \int_{a_i} \omega_j \right)_{1 \leq i, j \leq g},$$

est inversible, alors  $c_1 = \dots = c_g = 0$ , donc  $\eta = 0$  et d'après (4), on a

$$df = \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \eta_k^j.$$

Considérons l'application

$$\varphi : \mathcal{L}(\mathcal{D}) \longrightarrow V \equiv \{(c_j^k) : \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \int_{b_l} \eta_k^j = 0\}, \quad f \longmapsto c_j^k.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \text{Ker} \varphi &= \{f : \text{méromorphe sur } X \text{ et n'ayant pas de p\^ole}\}, \\ &= \{f : f \text{ est une constante}\}, \end{aligned}$$

d'où  $\dim \text{Ker} \varphi = 1$  et par conséquent,

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim V + 1.$$

Les espaces  $\frac{\mathcal{L}(\mathcal{D})}{\mathbb{C}}$  et  $V$  sont isomorphes et on a

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - 1 &= \dim V, \\ &= \dim \{(c_j^k) : \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \int_{b_l} \eta_k^j = 0\}, \\ &= \text{deg} \mathcal{D} - \text{rang} \mathcal{M}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \int_{b_1} \eta_1^2 & \int_{b_1} \eta_1^3 & \dots & \int_{b_1} \eta_1^{n_1+1} & \int_{b_1} \eta_2^2 & \dots & \int_{b_1} \eta_2^{n_2+1} & \dots & \int_{b_1} \eta_m^{n_m+1} \\ \int_{b_2} \eta_1^2 & \int_{b_2} \eta_1^3 & \dots & \int_{b_2} \eta_1^{n_1+1} & \int_{b_2} \eta_2^2 & \dots & \int_{b_2} \eta_2^{n_2+1} & \dots & \int_{b_2} \eta_m^{n_m+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \int_{b_g} \eta_1^2 & \int_{b_g} \eta_1^3 & \dots & \int_{b_g} \eta_1^{n_1+1} & \int_{b_g} \eta_2^2 & \dots & \int_{b_g} \eta_2^{n_2+1} & \dots & \int_{b_g} \eta_m^{n_m+1} \end{pmatrix},$$

est la matrice dont le nombre de lignes est  $g$  et le nombre de colonnes est  $\text{deg} \mathcal{D}$ . Notons que

$$\begin{aligned} \text{rang} \mathcal{M} &= \text{Nombre de colonnes} - \text{Nombre de relations entre ces colonnes}, \\ &= \text{deg} \mathcal{D} - \dim V, \\ &= \text{deg} \mathcal{D} - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) + 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Calculons maintenant le rang de  $\mathcal{M}$  d'une autre façon. Soit  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  une base normalisée de  $\Omega(X)$ , i.e., de telle sorte que  $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$ . Au voisinage de  $p_k$ , la forme  $\omega_s$  admet un développement en série de Taylor,

$$w_s = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{s_j}^k \tau^j \right) d\tau.$$

Posons  $\varphi_s \equiv \int_0^z \omega_s$  et soit  $X^*$  la représentation normale de la surface de Riemann  $X$ , i.e., un polygône à  $4g$  côtés identifiés deux à deux (On le désigne par  $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$  et peut être défini à partir d'une triangulation de la surface  $X$ ). Notons que si  $\tau \in a_j$ , alors il est identifié à  $\tau^* \in a_j^{-1}$ , d'où

$$\varphi_s(\tau^*) = \varphi_s(\tau) + \int_{b_j} \omega_s.$$

De même, si  $\tau \in b_j$ , alors il est identifié à  $\tau^* \in b_j^{-1}$  et

$$\varphi_s(\tau^*) = \varphi_s(\tau) + \int_{a_j} \omega_s.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\partial X^*} \varphi_s \eta_k^n &= \sum_{j=1}^g \left( \int_{a_j} \varphi_s \eta_k^n + \int_{b_j} \varphi_s \eta_k^n + \int_{a_j^{-1}} (\varphi_s + \int_{b_j} \omega_s) \eta_k^n + \int_{b_j^{-1}} (\varphi_s - \int_{a_j} \omega_s) \eta_k^n \right), \\ &= \sum_{j=1}^g \left( - \int_{b_j} \omega_s \int_{a_j} \eta_k^n + \int_{a_j} \omega_s \int_{b_j} \eta_k^n \right), \\ &= \sum_{j=1}^g \left( -\omega_s(b_j) \eta_k^n(a_j) + \omega_s(a_j) \eta_k^n(b_j) \right), \\ &= \sum_{j=1}^g \omega_s(a_j) \eta_k^n(b_j), \\ &= \eta_k^n(b_s). \end{aligned} \tag{6}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\partial X^*} \varphi_s \eta_k^n &= 2\pi i \sum_k \text{Rés}_{p_k}(\varphi_s \eta_k^n), \\ &= 2\pi i \frac{\alpha_{s,n-2}^k}{n-1}, \end{aligned}$$

donc la matrice  $\mathcal{M}$  a comme coefficient

$$\int_{b_s} \eta_k^n = \eta_k^n(b_s) = 2\pi i \frac{\alpha_{s,n-2}^k}{n-1}.$$

Dès lors

$$\det \mathcal{M} = C \det \mathcal{N},$$

où

$$C \equiv (2\pi i)(\pi i) \dots \left( \frac{2\pi i}{n_1} \right) (2\pi i) \dots \left( \frac{2\pi i}{n_2} \right) \dots \left( \frac{2\pi i}{n_m} \right),$$

est une constante et

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0}^1 & \alpha_{1,1}^1 & \cdots & \alpha_{1,n_1-1}^1 & \alpha_{1,0}^2 & \cdots & \alpha_{1,n_2-1}^2 & \cdots & \alpha_{1,n_m-2}^m \\ \alpha_{2,0}^1 & \alpha_{2,1}^1 & \cdots & \alpha_{2,n_1-1}^1 & \alpha_{2,0}^2 & \cdots & \alpha_{2,n_2-1}^2 & \cdots & \alpha_{2,n_m-2}^m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{g,0}^1 & \alpha_{g,1}^1 & \cdots & \alpha_{g,n_1-1}^1 & \alpha_{g,0}^2 & \cdots & \alpha_{g,n_2-1}^2 & \cdots & \alpha_{g,n_m-2}^m \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la dimension de l'espace  $\mathcal{L}(K - \mathcal{D})$  ou ce qui revient au même de l'espace  $\Omega(-\mathcal{D})$ , i.e., celui des formes différentielles  $\omega$  qui s'annulent  $n_k$  fois au point  $p_k$ . On a

$$\omega = \sum_{s=1}^g X_s \omega_s = \sum_{s=1}^g X_s (\alpha_{s,0}^k + \alpha_{s,1}^k \tau + \alpha_{s,2}^k \tau^2 + \dots) d\tau.$$

Pour que  $\omega$  s'annule  $n_k$  fois au point  $p_k$ , il faut que les  $n_k$  premières termes dans l'expression ci-dessus soient nulles. Dès lors,

$$(X_1, \dots, X_g) \cdot \mathcal{N} = 0,$$

tandis que la dimension de  $\mathcal{L}(K - \mathcal{D})$  coïncide avec celle de l'ensemble de  $(X_1, \dots, X_g)$  tel que :  $\omega = \sum_{s=1}^g X_s \omega_s$  s'annule  $n_k$  fois au point  $p_k$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) &= g - \text{rang} \mathcal{N}, \\ &= g - \text{rang} \mathcal{M}. \end{aligned}$$

D'où

$$\text{rang} \mathcal{M} = g - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}),$$

et en tenant compte de (5), on obtient finalement

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - g + 1.$$

*Étape 2* : La preuve donnée dans l'étape 1 est valable pour tout diviseur linéairement équivalent à un diviseur positif étant donné que  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D})$ ,  $\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D})$  (ou  $\dim \Omega(-\mathcal{D})$ ) et  $\deg \mathcal{D}$  ne seront pas affectés.

*Étape 3* : Soit  $f$  une fonction méromorphe,  $\mathcal{D}$  un diviseur positif et posons  $\mathcal{D}' = (f) + \mathcal{D}_0$ , autrement dit,  $\mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}_0$  sont linéairement équivalents. Nous allons tout d'abord démontrer les assertions suivantes :

- (i)  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}') = \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0)$ .
- (ii)  $\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}') = \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}_0)$ .
- (iii)  $\deg \mathcal{D}' = \deg \mathcal{D}_0$ .

En effet, pour tout  $g \in \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}')$ , on a

$$(g) + \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}') \geq 0,$$



et dès lors

$$\begin{aligned}
(fg) + \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0) &= (f) + (g) + \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0), \\
&= \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}') - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0) + (g) + \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0), \\
&= \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}') + (g) \geq 0.
\end{aligned}$$

L'application

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}') \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D}_0), \quad g \longmapsto fg,$$

est linéaire et admet comme réciproque

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_0) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D}'), \quad g \longmapsto \frac{g}{f}.$$

D'où  $\mathcal{L}(\mathcal{D}') \cong \mathcal{L}(\mathcal{D}_0)$  et par conséquent  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}') = \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0)$ . En ce qui concerne (ii), il suffit d'utiliser un raisonnement similaire au précédent. Pour (iii), on a

$$\deg(f) = \deg \mathcal{D}' - \deg \mathcal{D}_0,$$

et le résultat découle du fait que tout diviseur principal a le degré 0. En visageons maintenant les différents cas possibles :

1<sup>re</sup> cas :  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) > 0$ . Soit  $f_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ , d'où

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) \equiv (f_0) + \mathcal{D} > 0,$$

et

$$\dim \mathcal{L}((f_0) + \mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - (f_0) - \mathcal{D}) = \deg((f_0) + \mathcal{D}) - g + 1,$$

i.e.,

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - g + 1.$$

2<sup>ème</sup> cas :  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 0$  et  $\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) \neq 0$ . En appliquant la formule ci-dessus à  $K - \mathcal{D}$ , on obtient

$$\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \deg(K - \mathcal{D}) - g + 1. \quad (7)$$

Pour la suite, on aura besoin du résultat intéressant suivant : Pour tout diviseur canonique  $K$  sur une surface de Riemann compacte  $X$ , on a

$$\deg K = 2g - 2. \quad (8)$$

où  $g$  est le genre de  $X$ . En effet, en posant  $\mathcal{D} = K$  dans la formule (2), on obtient

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - g + 1.$$

Or  $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$ , donc  $\dim \mathcal{L}(0) = 1$  et on a

$$\deg K = g + \dim \mathcal{L}(K) - 2.$$

Par ailleurs, en posant  $\mathcal{D} = 0$  dans la formule (2), on obtient

$$\dim \mathcal{L}(0) - \dim \mathcal{L}(K) = \deg 0 - g + 1,$$

d'où  $\dim \mathcal{L}(K) = g$  et par conséquent  $\deg K = 2g - 2$ . Ceci achève la preuve du résultat annoncé. Pour terminer la preuve du 2<sup>ème</sup> cas, on utilise ce résultat et la formule (7), on obtient

$$\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = -\deg \mathcal{D} + g - 1.$$

3<sup>ème</sup> cas :  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = 0$ . Pour ce cas, on doit montrer que :  $\deg \mathcal{D} = g - 1$ . Pour cela, considérons deux diviseurs positifs  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  n'ayant aucun point en commun et posons  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ . On a

$$\deg \mathcal{D} = \deg \mathcal{D}_1 - \deg \mathcal{D}_2,$$

et

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) &\geq \deg \mathcal{D}_1 - g + 1, \\ &= \deg \mathcal{D} + \deg \mathcal{D}_2 - g + 1, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\deg \mathcal{D}_2 - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_1) \leq \deg \mathcal{D} + g - 1.$$

Or

$$\deg \mathcal{D}_2 - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_1) \geq 0,$$

car sinon il existe une fonction  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_1)$  qui s'annule en tout point de  $\mathcal{D}_2$ , donc  $\deg \mathcal{D} \leq g - 1$ . En appliquant le même raisonnement à  $K - \mathcal{D}$ , on obtient  $\deg(K - \mathcal{D}) \leq g - 1$ . Comme  $\deg K = 2g - 2$  (voir (8)), alors  $\deg \mathcal{D} \geq g - 1$ . Finalement,  $\deg \mathcal{D} = g - 1$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

**REMARQUE 1** La formule (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) = \deg \mathcal{D} - g + 1.$$

En introduisant la caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$\chi(\mathcal{D}) \equiv \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \Omega(-\mathcal{D}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}),$$

pour un diviseur  $\mathcal{D}$  sur une surface de Riemann  $X$  de genre  $g$ , le théorème de Riemann-Roch s'écrit

$$\chi(\mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - g + 1.$$

**REMARQUE 2** On sait que toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte  $X$  est constante. Une question se pose : Que se passe-t-il dans le cas des fonctions méromorphes ? La réponse découle du théorème de Riemann-Roch. Plus précisément, si  $p$  est un point quelconque de  $X$ , on peut trouver une fonction méromorphe non constante, holomorphe sur  $X \setminus \{p\}$  et ayant un pôle d'ordre inférieur ou égal à  $g+1$  en  $p$ . De même, on montre qu'il existe sur  $X$  des formes différentielles holomorphes non nulles, qui s'annulent en au moins un point.

**REMARQUE 3** Soient  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  une base de  $\Omega(X)$ . Soit  $(U, \tau)$  une carte locale en  $p \in X$  avec  $\tau(p) = 0$ . Il existe des fonctions  $f_j$  holomorphes sur  $U$  telles que  $\omega_j = f_j(\tau)d\tau$ . Le wronskien de  $\omega_1, \dots, \omega_g$  est défini par le déterminant

$$W_\tau(\omega_1, \dots, \omega_g) \equiv W(f_1, \dots, f_g) = \det(f_j^{(k-1)})_{1 \leq j, k \leq g}.$$

On dit que  $p$  est un point de Weierstrass si  $W_\tau(\omega_1, \dots, \omega_g)$  s'annule. Dans le cas où  $p$  est un point de Weierstrass alors on peut trouver une fonction méromorphe sur  $X$  ayant un pôle unique d'ordre inférieur ou égal au genre  $g$  au point  $p$ . Une autre application du théorème de Riemann-Roch, permet de montrer l'existence d'une suite de  $g$  entiers :  $1 = n_1 < n_2 < \dots < 2g$ ,  $g \geq 1$ , pour lesquels il n'existe aucune fonction holomorphe sur  $X \setminus p$ ,  $p \in X$ , et ayant un pôle en  $p$  d'ordre exactement  $n_j$ . On montre que  $p$  est un point de Weierstrass si et seulement si la suite des  $n_j$  est distincte de  $\{1, 2, \dots, g\}$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann compactes connexes et soit  $f$  une application holomorphe non constante de  $X$  dans  $Y$ . Notons que  $f$  est surjective, on dit que c'est un revêtement. Pour tout point  $p \in X$ , il existe une carte  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) de  $X$  (resp.  $Y$ ) centrée en  $p$  (resp.  $f(p)$ ) telles que :  $f_{\psi \circ \varphi}(\tau) = \tau^n$ , où  $n$  est un entier strictement positif. L'entier  $n - 1$  s'appelle indice de ramification de  $f$  au point  $p$  et on le note  $V_p(f)$ . Lorsque  $V_p(f)$  est strictement positif, alors on dit que  $p$  est un point de ramification (ou de branchement) de  $f$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $p$  soit un point de ramification de  $f$  est que le rang de  $f$  en  $p$  soit nul. L'image  $J$  des points de ramifications de  $f$  ainsi que son image réciproque  $I$  sont fermés et discrets. La restriction de  $f$  à  $X \setminus I$  est un revêtement de  $Y \setminus J$  dont le nombre de feuilletts est le degré de l'application  $f$  et on a

$$m \equiv \sum_{p \in f^{-1}(q)} (V_p(f) + 1), \quad \forall q \in Y.$$

**Corollaire 1** (Formule de Riemann-Hurwitz). Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann compactes de genre  $g(X)$  et  $g(Y)$  respectivement. Soit  $f$  une application holomorphe non constante de  $X$  dans  $Y$ . Alors

$$g(X) = m(g(Y) - 1) + 1 + \frac{V}{2},$$

où  $m$  est le degré de  $f$  et  $V$  est la somme des indices de ramification de  $f$  aux différents points de  $X$ .

**Démonstration** : Soit  $f : X \rightarrow Y$ , une application holomorphe non constante de degré  $m$ . Désignons par  $\omega$  une forme différentielle méromorphe non nulle sur  $Y$ . Soit  $\tau$  (resp.  $v$ ) un paramètre local sur  $X$  (resp.  $Y$ ) et supposons que  $v = f(\tau)$ . Soit  $\omega = g(\tau)d\tau$ , une forme différentielle méromorphe sur  $Y$  et soit  $\eta = g(f(\tau))f'(\tau)d\tau$ , une forme différentielle sur  $Y$ . Nous allons voir que cette dernière est aussi méromorphe. Notons que si on remplace  $\tau$  par  $\tau_1$ , avec  $\tau = w(\tau_1)$ , alors en terme de  $\tau_1$  l'application  $f$  s'écrit  $v = (f \circ w)(\tau_1)$ , et donc nous attribuons à  $\tau_1$  l'expression  $g(f(w(\tau_1)))f'(w(\tau_1))w'(\tau_1)d\tau_1$  ce qui montre que  $\eta$  est une forme différentielle méromorphe. On peut supposer que  $\tau$  s'annule dans un voisinage de  $p \in X$  et que  $v$  s'annule en  $f(p)$ . Dès lors,  $v = \tau^{V_f(p)+1}$  où  $V_f(p)$  est l'indice de ramification de  $f$  au point  $p$ . Par conséquent,

$$\text{ord}_p \eta = (V_f(p) + 1)\text{ord}_p \omega + V_f(p),$$

et

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p \eta = \sum_{p \in X} (V_f(p) + 1)\text{ord}_{f(p)} \omega + V,$$

où  $V = \sum_{p \in X} V_f(p)$ . D'après la formule 8, on a

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p \eta = 2g(X) - 2,$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} (V_f(p) + 1)\text{ord}_{f(p)} \omega &= \sum_{p \in X, V_f(p)=0} \text{ord}_{f(p)} \omega, \\ &= \sum_{q \in Y} m \cdot \text{ord}_q \omega, \\ &= m(2g(Y) - 2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2g(X) - 2 = m(2g(Y) - 2) + V,$$

ce qui achève la preuve du corollaire.

### 3 Exemples

Une des conséquences les plus intéressantes de la formule de Riemann-Hurwitz est de donner un moyen efficace de calculer le genre d'une surface de Riemann donnée.

**Exemple 1** Un cas particulier important est représenté par les courbes hyperelliptiques  $X$  de genre  $g(X)$  d'équations

$$w^2 = p_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j),$$

où  $p_n(z)$  est un polynôme sans racines multiples, i.e., tous les  $z_j$  sont distincts. Notons que

$$f : X \longrightarrow Y = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

est un revêtement double ramifié le long des points  $z_j$ . Chaque  $z_j$  est ramifié d'indice 1 et en outre le point à l'infini  $\infty$  est ramifié si et seulement si  $n$  est impair. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, on a

$$\begin{aligned} g(X) &= m(g(Y) - 1) + 1 + \frac{V}{2}, \\ &= 2(0 - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in X} V_f(p), \\ &= E\left(\frac{n-1}{2}\right), \end{aligned}$$

où  $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$  désigne la partie entière de  $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ . Les courbes hyperelliptiques de genre  $g$  sont associées aux équations de la forme :  $w^2 = p_{2g+1}(z)$ , ou  $w^2 = p_{2g+2}(z)$ , (selon que le point à l'infini  $\infty$  est un point de branchement ou non) avec  $p_{2g+1}(z)$  et  $p_{2g+2}(z)$  des polynômes sans racines multiples. Lorsque  $g = 1$ , on dit courbes elliptiques.

**Exemple 2** Déterminons le genre  $g$  de la surface de Riemann  $X$  associée à l'équation :

$$F(w, z) = w^3 + p_2(z)w^2 + p_4(z)w + p_6(z) = 0,$$

où  $p_j(z)$  désigne un polynôme de degré  $j$ . On procède comme suit : on a

$$\begin{aligned} F(w, z) &= w^3 + az^2w^2 + bz^4w + cz^6 + \text{termes d'ordre inférieur}, \\ &= \prod_{j=1}^3 (z + \alpha_j z^2) + \text{termes d'ordre inférieur}, \end{aligned}$$

Considérons  $F$  comme un revêtement par rapport à  $z$  et cherchons ce qui se passe quand  $z \nearrow \infty$ . On a

$$\begin{aligned} (w)_\infty &= -2P - 2Q - 2R, \\ (z)_\infty &= -P - Q - R. \end{aligned}$$

Posons  $t = \frac{1}{z}$ , d'où

$$F(w, z) = \frac{1}{t^6}(t^6 z^3 + at^4 z^2 + bt^2 z + c) + \dots$$

Ceci suggère le changement de cartes suivant :

$$(w, z) \mapsto (\zeta = t^2 w, t = \frac{1}{z}).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} &= 3w^2 + 2p_2(z)w + p_4(z), \\ &= 3w^2 + 2az^2 w + bz^4 + \dots, \\ &= \frac{3\zeta^2}{t^4} + \frac{2a\zeta}{t^4} + \frac{b}{t^4} + \dots \end{aligned}$$

La fonction  $\frac{\partial F}{\partial w}$  étant méromorphe sur la surface de Riemann  $X$ , alors Le nombre de zéros de cette fonction coincide avec celui de ses pôles. Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_P &= -4P, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_Q &= -4Q, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_R &= -4R, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_\infty &= -4(P + Q + R), \end{aligned}$$

alors le nombre de zéros de  $\frac{\partial F}{\partial w}$  dans la partie affine  $X \setminus \{P, Q, R\}$  est égal à 8, et d'après la formule de Riemann-Hurwitz, on a  $g(X) = 4$ .

**Exemple 3** Calculons le genre de la surface de Riemann  $X$  associée au polynôme :

$$w^4 = z^4 - 1.$$

Ici, on a quatre feuillets. Les points de ramifications à distance finie sont  $1, -1, i$  et  $-i$ . On note que  $z = \infty$  n'est pas un point de ramification. L'indice de ramification étant égal à 12, alors d'après la formule de Riemann-Hurwitz, le genre de la surface de Riemann en question est égal à 3.

**Exemple 4** Considérons la courbe de Fermat  $X$  associée à l'équation :

$$w^n + z^n = 1, \quad n \geq 2.$$

Ici on a un revêtement de degré  $n$ . Chaque racine  $n^{\text{ème}}$  de l'unité est ramifié d'indice  $n-1$  tandis que le point à l'infini  $\infty$  n'est pas un point de ramification et par conséquent

$$g(X) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

L'équation de Fermat :

$$U^n + V^n = W^n,$$

(avec  $w = \frac{U}{Z}$ ,  $z = \frac{V}{Z}$ ) étant de genre  $\geq 1$  pour  $n \geq 3$ , elle n'admet donc qu'un nombre fini de solutions. Ce fut une des pistes utilisées récemment par A. Wiles pour prouver le grand théorème de Fermat : pour  $n \geq 3$  cette équation n'a pas de solution non triviale.

**Exemple 5** Déterminons le genre de la surface de Riemann  $X$  associée au polynôme :

$$(w^2 - 1)((w^2 - 1)z^4 - p(z)) + c = 0,$$

où

$$p(z) = az^2 - 2bz - 1,$$

et  $a, b, c$  sont des constantes non nulles. Cette surface a été obtenue pour la première fois par l'auteur [6] en 1988, lors de l'étude du célèbre problème de Kowalewski concernant la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Cette surface a permis de bien comprendre la géométrie liée à ce problème et a été utilisée par la suite pour élucider d'autres questions (voir par exemple [1]) concernant le flot géodésique sur le groupe des rotations  $SO(4)$  ainsi que celui du système de Hénon-Heiles. Le calcul du genre de  $X$  n'est pas immédiat. Notons tout d'abord que l'application

$$\sigma : X \longrightarrow X, (w, z) \longmapsto (-w, z),$$

est une involution (automorphisme d'ordre deux) sur  $X$ . Le quotient  $Y = X/\sigma$  de  $X$  par l'involution  $\sigma$  est une courbe elliptique définie par

$$u^2 = p^2(z) - 4cz^4.$$

La surface de Riemann  $X$  est un revêtement double ramifié le long de la courbe  $Y$  :

$$X \longrightarrow Y, (w, u, z) \longmapsto (u, z),$$

$$X : \begin{cases} w^2 &= \frac{2z^4 + p(z) + u}{2z^4} \\ u^2 &= p^2(z) - 4cz^4 \end{cases}$$

Pour  $z$  suffisamment petit, on a

$$w^2 = \frac{2z^4 + p(z) + \sqrt{p^2(z) - 4cz^4}}{2z^4} = 1 - c + o(z),$$

et

$$w^2 = \frac{2z^4 + p(z) - \sqrt{p^2(z) - 4cz^4}}{2z^4} = \frac{1}{z^4}(-1 + o(z)).$$

Au voisinage de  $z = \infty$ , on a

$$2(w^2 - 1)z^2 = a \pm \sqrt{a^2 - 4c} + o(z).$$

La surface  $X$  possède quatre points à l'infini  $p_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) et quatre points de ramifications

$$q_j \equiv (w = 0, u = -2z^4 - p(z), z^4 + p(z) + c = 0), \quad 1 \leq j \leq 4,$$

sur la courbe elliptique  $Y$ . Dès lors, la structure des diviseurs de  $w$  et  $z$  sur  $X$  est

$$\begin{aligned} (w) &= \sum_{1 \leq j \leq 4} q_j - \sum_{1 \leq j \leq 4} p_j, \\ (z) &= \text{quatre zéros} - \sum_{1 \leq j \leq 4} p_j. \end{aligned}$$

Finalement, en appliquant la formule de Riemann-Hurwitz, on obtient

$$g(X) = m(g(Y) - 1) + 1 + \frac{V}{2} = 2(1 - 1) + 1 + \frac{4}{2} = 3.$$

## Références

- [1] ADLER, M. AND VAN MOERBEKE, P. : The Kowalewski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on  $SO(4)$  -A two-dimensional family of Lax pairs, *Comm. Math. Phys.*, **113** (1988) 659-700.
- [2] FARKAS, H. AND KRA, I. : Riemann surfaces, Springer-Verlag, 1980.
- [3] FORSTER, O. : Lectures on Riemann surfaces, Springer-Verlag, 1981.
- [4] GRIFFITHS, P.A. : Introduction to algebraic curves, Translations of mathematical monographs, Volume 76, American mathematical society, 1989.
- [5] JOST, J. : Compact Riemann surfaces. An introduction to contemporary mathematics, Springer-Verlag, 1997.
- [6] LESFARI, A. : Abelian surfaces and Kowalewski's top, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, Paris, sér. 4, **21** (1988) 193-223.
- [7] LESFARI, A. : Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems, *Beiträge Algebra Geom.*, Vol.48, 1 (2007) 95-114.
- [8] SPRINGER, G. : Introduction to Riemann surfaces, 2nd ed., New York, Chelsea, 1981.