

Uniform exponential-power estimate for the solution to a family of the Cauchy problems for linear differential equations

Evgeny E. Bukzhalev*

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

October 16, 2018

Abstract

We consider a solution to a parametric family of the Cauchy problems for m th-order linear differential equations with constant coefficients. Parameters of the family are the coefficients of the differential equation and the initial values of the solution and its derivatives up to the $(m - 1)$ th-order (by a solution to a family of problems we mean a function of the parameters of the given family that maps each tuple of parameters to a solution to the problem with these parameters). We obtain an exponential-power estimate for the functions of this parametric family that is uniform (with respect to parameters) on any bounded set. We also prove that the maximal element of the set of real parts of monic polynomial roots is a continuous function (of the coefficients of the polynomial). The continuity of this element is used for obtaining the estimate mentioned above (since to each tuple of coefficients of the differential equation there corresponds its characteristic polynomial with these coefficients, the set of the roots of the characteristic polynomial and the maximal element of this set are also functions of the coefficients of the differential equation).

Keywords: families of linear differential equations, estimates for solutions of differential equations, initial value problem for ordinary differential equation, estimates for roots of polynomials, Routh–Hurwitz stability criterion.

1 Introduction

We obtain a uniform (with respect to parameters $M_m \in \mathbb{C}^m$ and $N_m \in \mathbb{C}^m$) exponential-power estimate for the solution $w(\cdot; M_m, N_m) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ to the Cauchy problem for a linear differential equation of an arbitrary order $m \in \mathbb{N}$ with constant coefficients M_m and initial values N_m considered as parameters for w :

$$w^{(m)}(\xi; M_m, N_m) = a_{m-1} w^{(m-1)}(\xi; M_m, N_m) + \dots + a_0 w(\xi; M_m, N_m), \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (1)$$

$$w(0; M_m, N_m) = w^0, \dots, w^{(m-1)}(0; M_m, N_m) = w^{m-1}, \quad (2)$$

where $M_m = (a_0, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, $N_m = (w^0, \dots, w^{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, $w^{(i)}$ is the i th derivative of the function $w(\cdot; M_m, N_m)$ (i.e., the i th derivative of the function w with respect to the first

*E-mail: bukzhalev@mail.ru

argument). We also estimate the first $(m - 1)$ derivatives of the function $w(\cdot; M_m, N_m)$ (recall that the Cauchy problem for equation (1) has a unique solution for any a_i and w^i). But since in view of equation (1) the derivatives of $w(\cdot; M_m, N_m)$ of order $n \geq m$ is a linear combination of lower-order derivatives, it follows that in fact the uniform exponential-power estimates hold for an arbitrary-order derivative of $w(\cdot; M_m, N_m)$.

Definition 1. Let \mathfrak{K} be the map that to each double $(M_m, N_m) \in (\mathbb{C}^m)^2 =: D_{\mathfrak{K}}$ assigns problem (1)–(2). The map \mathfrak{K} is called the family of the Cauchy problems for the m th-order differential equation (with constant coefficients), and the components M_m and N_m of double $(M_m, N_m) \in D_{\mathfrak{K}}$ are called the parameters of the family \mathfrak{K} .

Remark 1. The restriction of the map \mathfrak{K} to a set $\mathcal{M} \subseteq D_{\mathfrak{K}}$ is often called subfamily of the family \mathfrak{K} and is denoted by $\{\mathfrak{K}(M_m, N_m)\}_{(M_m, N_m) \in \mathcal{M}}$.

Definition 2. Let W be the map that takes each double $(M_m, N_m) \in D_{\mathfrak{K}}$ to the solution to the problem $\mathfrak{K}(M_m, N_m)$ (i.g., the solution to problem (1)–(2)). The map W is said to be the solution to the family \mathfrak{K} .

Remark 2. The value $W(M_m, N_m)$ of the map W is a function of one real variable. This function is the solution to problem (1)–(2). And since we already denoted the solution to this problem by $w(\cdot; M_m, N_m)$, there is the following relation between W and w : $W(M_m, N_m)(\xi) = w(\xi; M_m, N_m)$ (strictly speaking, just this relation defines w).

Let \mathfrak{E} be the map that to each single $M_m \in \mathbb{C}^m$ assigns the differential equation of the family $\mathfrak{K}(M_m, \cdot) := \{\mathfrak{K}(M, N_m)\}_{(M, N_m) \in \{M_m\} \times \mathbb{C}^m}$ (see (1)). It is known (see, e.g., [1]) that the structure of the solution $W(M_m, N_m)$ to the problem $\mathfrak{K}(M_m, N_m)$ depends on the distribution of the multiplicity of the roots of the characteristic polynomial $\mathfrak{P}(M_m)$ (see (3)) for the equation $\mathfrak{E}(M_m)$ (here M_m is a tuple of coefficients a_i of both the equation and its characteristic polynomial). Therefore, the explicit formula for $w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)$ can hardly be used to obtain uniform estimates for the functions $w^{(i)}(\cdot; M_m, N_m)$ with respect to M_m and N_m (the exceptions are the cases of $m = 1$ and $m = 2$ (see [2, 3], where these estimates are obtained for the case of a second-order differential equation ($m = 2$) with constant real coefficients)).

In the sequel we need one uniform (with respect to the coefficients a_i) estimate for $\bar{\Lambda}^m$, which is the greatest of the real parts of the roots of the characteristic polynomial for the equation $\mathfrak{E}(M_m)$. Its derivation is based on the continuity of $\bar{\Lambda}^m$ (as a function of M_m) and we begin our paper with a proof of this continuity.

2 Proof of the continuity of $\bar{\Lambda}^m$

Let \mathfrak{P} be the map that to each $M_m = (a_0, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ assigns the characteristic polynomial for the equation $\mathfrak{E}(M_m)$ (see (1)):

$$\mathfrak{P}(M_m) := \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - a_1 \lambda - a_0. \quad (3)$$

The map P is also called a family of polynomials. Since the degree of the polynomial $\mathfrak{P}(M_m)$ is m for all $M_m \in \mathbb{C}^m$, there exist functions $\lambda^1, \dots, \lambda^m: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\forall M_m \in \mathbb{C}^m \quad \mathfrak{P}(M_m) = (\lambda - \lambda^1(M_m)) \dots (\lambda - \lambda^m(M_m)). \quad (4)$$

The numbers $\lambda^1(M_m), \dots, \lambda^m(M_m)$ are called roots of the polynomial $\mathfrak{P}(M_m)$. A tuple $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ of the functions $\lambda^i: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ that satisfy condition (4) is called a full tuple of roots of the

family \mathfrak{P} . Further, by the continuity (on set \mathbb{M}) of a tuple $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ we mean the continuity (on \mathbb{M}) of each its component.

Denote by \mathcal{L} the set of all maps $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, $M \mapsto (\lambda^1(M), \dots, \lambda^m(M))$, such that $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ is a full tuple of roots of the family \mathfrak{P} . There are infinitely many full tuples of roots, since for each $M_m \in \mathbb{C}^m$ there are various ways to label the roots of the polynomial $\mathfrak{P}(M_m)$ (we assume that each root is repeated as many times as its multiplicity). It is easy to verify that for $m \geq 2$ the set \mathcal{L} contains no maps continuous in the whole space \mathbb{C}^m . Moreover, for $m \geq 4$ the set \mathcal{L} contains no maps with continuous restriction to \mathbb{R}^m (the proof can be found in [4]). However, it is known that for each m and any point $M_0 \in \mathbb{C}^m$, there exists a map $\Lambda_{M_0} \in \mathcal{L}$ continuous at this point (see, e.g., [5]).

Remark 1. Each map Λ_{M_0} is continuous at the corresponding point M_0 . I.g., first we fix point M_0 and then choose the map Λ_{M_0} continuous at this point (the map Λ_{M_0} can be discontinuous at other points). If we change the point then, generally speaking, we will have to change the map. Each point M_0 has its nonempty set \mathfrak{S}_{M_0} of full tuples of roots of the family \mathfrak{P} continuous at this point and the intersection of the family of sets $\{\mathfrak{S}_{M_0}\}_{M_0 \in \mathbb{C}^m}$ for $m \geq 2$ is empty.

Lemma 1. *Let $\mathcal{L} \ni \Lambda : M \mapsto (\lambda^1(M), \dots, \lambda^m(M))$. Then*

$$\bar{\Lambda}^m : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad M_m \mapsto \max\{\operatorname{Re} \lambda^1(M_m), \dots, \operatorname{Re} \lambda^m(M_m)\} \quad (5)$$

is a continuous function on \mathbb{C}^m .

Remark 2. For each point $M_m \in \mathbb{C}^m$ the unordered set of roots of the polynomial $\mathfrak{P}(M_m)$ and the value $\bar{\Lambda}^m(M_m)$ are independent of the choice of $\Lambda \in \mathcal{L}$. Thus, to each $\Lambda \in \mathcal{L}$ (i.e., to each way of numbering of roots of the family \mathfrak{P}) there corresponds the same function $\bar{\Lambda}^m$.

Proof of Lemma 1. We fix an arbitrary point $M_0 \in \mathbb{C}^m$ and choose a map $\Lambda_{M_0} \in \mathcal{L}$ which is continuous at this point. Let $\Lambda_{M_0} : M \mapsto (\lambda_{M_0}^1(M), \dots, \lambda_{M_0}^m(M))$. Then each of the functions $\lambda_{M_0}^i$ is also continuous at the point M_0 . But the continuity of $\lambda_{M_0}^i$ implies that of $\operatorname{Re} \lambda_{M_0}^i$, whereas the continuity of all $\operatorname{Re} \lambda_{M_0}^i$ implies the continuity of the maximum of these functions. \square

3 Obtaining exponential-power estimates

We put $\Pi_m(C) := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m : |x_1| \leq C, \dots, |x_m| \leq C\}$.

Proposition 1. *Let $C_a \geq 0$, $C_w \geq 0$. Then there exists $\tilde{C}_m \geq 0$ such that*

$$|w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{\bar{\Lambda}^m(M_m)\xi} \quad (6)$$

for all $(i, \xi, M_m, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \Pi_m(C_a) \times \Pi_m(C_w)$, where $w(\cdot; M_m, N_m)$ is the solution to problem (1)–(2), $\bar{\Lambda}^m$ is the function from Lemma 1.

Proof. We use induction on m . We denote by S_m the conclusion of Proposition 1. Since S_1 is clearly true, it remains to verify, that S_{m+1} follows from S_m implies for any $m \in \mathbb{N}$.

Consider the Cauchy problem for the $(m+1)$ th-order equation:

$$w^{(m+1)}(\xi; M_m, N_m) = a_m w^{(m)}(\xi; M_m, N_m) + \dots + a_0 w(\xi; M_m, N_m), \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (7)$$

$$w(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = w^0, \dots, w^{(m)}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = w^m \quad (8)$$

and fix arbitrary $C_a \geq 0$ and $C_w \geq 0$. The statement of S_{m+1} is as follows: there exists \tilde{C}_{m+1} such that

$$|w^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| \leq \tilde{C}_{m+1} (1 + \xi^m) e^{\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})\xi}$$

for all $(i, \xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \overline{0, m} \times [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$, where $w(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1})$ is the solution to problem (7)–(8).

To verify the validity of S_{m+1} (assuming that S_m is true) we change the variable in problem (7)–(8):

$$w(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = e^{\lambda^*(M_{m+1})\xi} u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad (9)$$

where λ^* is a function that takes each tuple $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ to an arbitrary root $\lambda_i(M_{m+1})$ of the characteristic polynomial for equation (7) whose real part $\operatorname{Re} \lambda_i(M_{m+1})$ coincides with $\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})$:

$$\operatorname{Re} \lambda^*(M_{m+1}) = \bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1}). \quad (10)$$

For the new function $u(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1}) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ we obtain the following initial-value problem:

$$\begin{aligned} u^{(m+1)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) &= b_m(M_{m+1}) u^{(m)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) + \dots + \\ &+ b_1(M_{m+1}) u'(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad \xi \in (0, +\infty); \end{aligned} \quad (11)$$

$$u(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^0(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, u^{(m)}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^m(M_{m+1}, N_{m+1}). \quad (12)$$

Here $b_i(M_{m+1}) = \tilde{b}_i(\lambda^*(M_{m+1}), M_{m+1})$, $u^i(M_{m+1}, N_{m+1}) = \tilde{u}^i(\lambda^*(M_{m+1}), N_{m+1})$, where, in its turn, $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m)$ and $N_{m+1} = (w^0, \dots, w^m)$, \tilde{b}_i and \tilde{u}^i are the known functions of $m+2$ arguments (polynomial with respect to the first argument and linear with respect to other $m+1$ arguments). In equation (11), we already took into account that its characteristic polynomial has the zero as a root for $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ (see (13)), so the coefficient $b_0(M_{m+1})$ of the $u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})$ vanishes identically.

Due to (9), for each $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ the roots of the characteristic polynomial for equation (11) are as follows:

$$\mu_i(M_{m+1}) := \lambda_i(M_{m+1}) - \lambda^*(M_{m+1}), \quad i \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (13)$$

This and the definition of $\lambda^*(M_{m+1})$ yield

$$\operatorname{Re} \mu_i(M_{m+1}) \leq 0 \quad (14)$$

for all $(i, M_{m+1}) \in \{1, \dots, m+1\} \times \mathbb{C}^{m+1}$.

Since we assume that the points $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m)$ lie in the finite parallelepiped $P_{m+1}(C_a)$, all roots $\lambda_i(M_{m+1})$ of the characteristic polynomial for equation (7) satisfy the inequality (see, e.g., [6]):

$$|\lambda_i(M_{m+1})| \leq 1 + C_a. \quad (15)$$

So there exist constants $C_b \geq 0$ and $C_u \geq 0$ such that

$$|b_i(M_{m+1})| \leq C_b, \quad |u^i(M_{m+1}, N_{m+1})| \leq C_u \quad (16)$$

for all $(i, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \overline{0, m} \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$.

We reduce the order of equation (11) by one more change of variable:

$$u'(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = v(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}). \quad (17)$$

The function $v(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1}) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfies the following initial-value problem:

$$\begin{aligned} v^{(m)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) &= b_m(M_{m+1}) v^{(m-1)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) + \dots + \\ &+ b_1(M_{m+1}) v(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad \xi \in (0, +\infty); \end{aligned} \quad (18)$$

$$v(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^1(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, v^{(m-1)}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^m(M_{m+1}, N_{m+1}).$$

Let $\nu_1(M_{m+1}), \dots, \nu_m(M_{m+1})$ be the roots of the characteristic polynomial for equation (18). Since each $\nu_i(M_{m+1})$ is at the same time a root of the characteristic polynomial for equation (11), they satisfy the same inequality as $\mu_i(M_{m+1})$ (see (14)) for all $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$:

$$\operatorname{Re} \nu_i(M_{m+1}) \leq 0. \quad (19)$$

Note also that (see (16))

$$\begin{aligned} M_m &= (b_1(M_{m+1}), \dots, b_m(M_{m+1})) \in \Pi_m(C_b), \\ N_m &= (u^1(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, u^m(M_{m+1}, N_{m+1})) \in \Pi_m(C_u) \end{aligned}$$

for all $M_{m+1} \in \Pi_{m+1}(C_a)$ and $N_{m+1} \in \Pi_{m+1}(C_w)$. The last estimates allow one to apply the induction hypothesis to the function v : there exists $\tilde{C}_m \geq 0$ such that (see (6), (5) and (19))

$$|v^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) \quad (20)$$

for all $(i, \xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$.

From (17) and (20) we immediately obtain

$$|u^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| = |v^{(i-1)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) \quad (21)$$

for the first m derivatives of the function $u(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1})$ (here and until the end of the proof we assume that $(\xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$).

To estimate the function u itself, we integrate (17) and then use (12), (16), and (20) and employ the monotonicity property and the estimate of the absolute value of the definite integral:

$$\begin{aligned} |u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| &= \left| u(0; M_{m+1}, N_{m+1}) + \int_0^\xi v(\zeta; M_{m+1}, N_{m+1}) d\zeta \right| \leq |u^0(M_{m+1}, N_{m+1})| + \\ &+ \int_0^\xi |v(\zeta; M_{m+1}, N_{m+1})| d\zeta \leq C_u + \int_0^\xi \tilde{C}_m (1 + \zeta^{m-1}) d\zeta \leq \tilde{C}_u (1 + \xi^m) \end{aligned} \quad (22)$$

for sufficiently large \tilde{C}_u .

We turn back to w . From (9), (22), (21), (15), (10) and the Leibniz formula (for the i th-order derivative of the product of two functions) for each $i \in \overline{0, m}$ and sufficiently large \tilde{C}_{m+1} we have

$$\begin{aligned} |w^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| &\leq \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} |u^{(j)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| |\lambda^*(M_{m+1})|^{i-j} |e^{\lambda^*(M_{m+1})\xi}| \leq \\ &\leq \left[\tilde{C}_u (1 + \xi^m) (1 + C_a)^i + \sum_{j=1}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) (1 + C_a)^{i-j} \right] e^{\operatorname{Re} \lambda^*(M_{m+1})\xi} \leq \\ &\leq \tilde{C}_{m+1} (1 + \xi^m) e^{\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})\xi}. \end{aligned}$$

□

Remark 1. Since due to equation (1), the derivative of the function $w(\cdot; M_m, N_m)$ of the order $i \geq m$ is a linear combination of its lower derivatives, by induction on i one can easily verify that for any nonnegative integer i there exists $\tilde{C}_m^i \geq 0$ such that

$$|w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)| \leq \tilde{C}_m^i (1 + \xi^{m-1}) e^{\bar{\Lambda}^m(M_m)\xi}$$

for all $(\xi, M_m, N_m) \in [0, +\infty) \times \Pi_m(C_a) \times \Pi_m(C_w)$.

Remark 2. If we replace the rectangles $\Pi_m(C_a)$ and $\Pi_m(C_w)$ by arbitrary bounded sets \mathbb{D}_a and \mathbb{D}_w (they can also be sets of \mathbb{R}^m) in Proposition 1, then it obviously remain valid.

Remark 3. By the uniformity of estimate (6) we mean the independence of the coefficient \tilde{C}_m of the parameters a_i and w^i . At the same time the coefficient of ξ in the argument of the exponential function depends on the parameters a^i . Thus, estimate (6) is only semi-uniform in some sense. Of course we can apply (15) and replace $\bar{\Lambda}^m(M_m)$ by $1 + C_a$ in (6), that gives us completely uniform but, generally speaking, more rough estimate. However, such loss of accuracy is sometimes undesirable, especially if the coefficient of ξ in the argument of the exponential function change its sign (from negative to positive)—this is the case that will be discussed below.

Let \mathbb{D}_a be a closed bounded set and let it be known (e.g., due to Routh–Hurwitz criterion, see [7]) that $\forall (i, M_m) \in \overline{1, m} \times \mathbb{D}_a \operatorname{Re} \lambda^i(M_m) < 0$. Then $\forall M_m \in \mathbb{D}_a \bar{\Lambda}^m(M_m) < 0$, and since due to Lemma 1 the function $\bar{\Lambda}^m$ is continuous on the whole \mathbb{C}^m (and hence it is continuous on any set \mathbb{D}_a of this space), it follows from Weierstrass’s theorem on the maximum of a continuous function that $\exists M_m^* \in \mathbb{D}_a \forall M_m \in \mathbb{D}_a \bar{\Lambda}^m(M_m) \leq \bar{\Lambda}^m(M_m^*) < 0$. This and Proposition 1 imply the existence of $\tilde{C}_m > 0$ such that for all $(i, \xi, M_m, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \mathbb{D}_a \times \mathbb{D}_w$ (here \mathbb{D}_w is an arbitrary bounded set of \mathbb{C}^m) the solution $w(\cdot; M_m, N_m)$ of problem (1)–(2) satisfies the inequality

$$|w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{-\varkappa \xi}, \quad (23)$$

where $\varkappa := -\bar{\Lambda}^m(M_m^*) > 0$.

Finally, we consider the family (with respect to parameters, which are listed below) of the Cauchy problems for linear differential equation of an arbitrary order $m \in \mathbb{N}$ with coefficients depending on the parameters t_1, \dots, t_k (moreover, the initial values of the solution $w(\cdot; M_k, N_m)$ and its derivatives still act as parameters)

$$\begin{aligned} w^{(m)}(\xi; M_k, N_m) &= a_{m-1}(t_1, \dots, t_k) w^{(m-1)}(\xi; M_k, N_m) + \dots + \\ &+ a_0(t_1, \dots, t_k) w(\xi; M_k, N_m) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty); \\ w(0; M_k, N_m) &= w^0, \dots, w^{(m-1)}(0; M_k, N_m) = w^{m-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

where $M_k = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{D}_t \subseteq \mathbb{C}^k$, $N_m = (w^0, \dots, w^{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, $a_i : \mathbb{D}_t \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposition 2. *Suppose \mathbb{D}_t is a closed bounded set of \mathbb{C}^k , \mathbb{D}_w is a bounded set of \mathbb{C}^m , $a : \mathbb{D}_t \ni M_k \mapsto (a_0(M_k), \dots, a_{m-1}(M_k)) \in \mathbb{C}^m$, the functions a_0, \dots, a_{m-1} are continuous on \mathbb{D}_t , $\forall M_k \in \mathbb{D}_t \bar{\Lambda}^m(a(M_k)) < 0$ (here $\bar{\Lambda}^m$ is the function from Lemma 1). Then there exists $\tilde{C}_m \geq 0$ and $\varkappa > 0$ such that*

$$|w^{(i)}(\xi; M_k, N_m)| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{-\varkappa \xi}$$

for all $(i, \xi, M_k, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \mathbb{D}_t \times \mathbb{D}_w$, where $w(\cdot; M_k, N_m)$ is the solution to problem (24).

Proof. Since $a(\mathbb{D}_t) =: \mathbb{D}_a$ is a bounded closed set of \mathbb{C}^m , to prove Proposition 2 it suffices to note that

$$\max_{M_k \in \mathbb{D}_t} \bar{\Lambda}^m(a(M_k)) = \max_{M_m \in \mathbb{D}_a} \bar{\Lambda}^m(M_m),$$

and then put $\varkappa := - \max_{M_k \in \mathbb{D}_t} \bar{\Lambda}^m(a(M_k))$ and apply estimate (23). □

References

- [1] A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva, and A. G. Sveshnikov, *Differential Equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1st ed., 1985.
- [2] E. E. Bukzhalev, “On one method for the analysis of the Cauchy problem for a singularly perturbed inhomogeneous second-order linear differential equation,” *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **57** no. 10, (Oct, 2017) 1635–1649. <https://doi.org/10.1134/S0965542517100050>.
- [3] E. E. Bukzhalev, “The Cauchy problem for singularly perturbed weakly nonlinear second-order differential equations: An iterative method,” *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics* **41** no. 3, (Jul, 2017) 113–121. <https://doi.org/10.3103/S0278641917030037>.
- [4] E. E. Bukzhalev, “On the Global Continuity of the Roots of Families of Monic Polynomials (in Russian),” *ArXiv e-prints* (Sept., 2017) , [arXiv:1710.00640](https://arxiv.org/abs/1710.00640) [math.CA].
- [5] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*. Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 9. Academic Press, New York and London, 2nd ed., 1966.
- [6] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*. AMS Chelsea Publishing Series, Vol. 296. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2nd ed., 2005.
- [7] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices, Vol. 2*. AMS Chelsea Publishing Series, Vol. 133. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2000.

Равномерная экспоненциально-степенная оценка решения семейства задач Коши для линейных дифференциальных уравнений

Букжалёв Е. Е.*

Россия, Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

16 октября 2018 г.

Аннотация

Рассмотрено решение семейства задач Коши для линейных дифференциальных уравнений m -го порядка с постоянными коэффициентами, при этом в качестве параметров семейства выступают коэффициенты дифференциального уравнения и начальные значения решения и его производных до $(m - 1)$ -го порядка (под решением семейства задач понимается функция параметров данного семейства, которая каждому набору параметров ставит в соответствие одно из решений задачи с этими параметрами). Получена равномерная по параметрам (принадлежащим ограниченному множеству) экспоненциально-степенная оценка функций этого семейства. Кроме того, доказана непрерывность (по коэффициентам полинома) максимального элемента множества действительных частей корней приведённого полинома (произвольной степени m), используемая при установлении указанной оценки (поскольку каждому набору коэффициентов дифференциального уравнения отвечает свой характеристический полином с этими коэффициентами, то множество корней характеристического полинома, а вместе с ним и максимальный элемент множества действительных частей этих корней, также являются функцией коэффициентов).

Ключевые слова: семейства линейных дифференциальных уравнений, оценки решений дифференциальных уравнений, начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения, оценки корней многочленов, критерий устойчивости Гурвица.

1 Введение

Настоящая работа посвящена установлению равномерной (по параметрам $M_m \in \mathbb{C}^m$ и $N_m \in \mathbb{C}^m$) экспоненциально-степенной оценки решения $w(\cdot; M_m, N_m) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ задачи Коши для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка $m \in \mathbb{N}$ с постоянными коэффициентами M_m , рассматриваемыми как параметры для w (при этом в качестве параметров выступают также начальные значения N_m для $w(\cdot; M_m, N_m)$ и его производных):

$$w^{(m)}(\xi; M_m, N_m) = a_{m-1} w^{(m-1)}(\xi; M_m, N_m) + \dots + a_0 w(\xi; M_m, N_m), \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (1)$$

*E-mail: bukzhalev@mail.ru

$$w(0; M_m, N_m) = w^0, \dots, w^{(m-1)}(0; M_m, N_m) = w^{m-1}, \quad (2)$$

где $M_m = (a_0, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, $N_m = (w^0, \dots, w^{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, $w^{(i)}$ — производная i -го порядка функции $w(\cdot; M_m, N_m)$ (то есть производная i -го порядка функции w по её первому аргументу). Вместе с самим решением $w(\cdot; M_m, N_m)$ мы одновременно оценим его производные до $(m-1)$ -го порядка (напомним, что задача Коши для уравнения (1) имеет единственное решение при любых значениях a_i и w^i). Но поскольку в силу уравнения (1) производная $w(\cdot; M_m, N_m)$ порядка $n \geq m$ является линейной комбинацией младших производных, то равномерные экспоненциально-степенные оценки, на самом деле, справедливы для производных произвольного порядка.

Определение 1. Пусть \mathfrak{K} — отображение, которое каждой двойке $(M_m, N_m) \in (\mathbb{C}^m)^2 =: D_{\mathfrak{K}}$ ставит в соответствие задачу (1)–(2). Отображение \mathfrak{K} будем называть семейством задач Коши для дифференциального уравнения m -го порядка (с постоянными коэффициентами), а компоненты M_m и N_m двойки $(M_m, N_m) \in D_{\mathfrak{K}}$ — параметрами этого семейства.

Замечание 1. Сужение отображения \mathfrak{K} на некоторое множество $\mathcal{M} \subseteq D_{\mathfrak{K}}$ часто называют подсемейством семейства \mathfrak{K} и обозначают $\{\mathfrak{K}(M_m, N_m)\}_{(M_m, N_m) \in \mathcal{M}}$.

Определение 2. Пусть W — отображение, которое каждой двойке $(M_m, N_m) \in D_{\mathfrak{K}}$ ставит в соответствие решение задачи $\mathfrak{K}(M_m, N_m)$ (то есть задачи (1)–(2)). Отображение W будем называть решением семейства \mathfrak{K} .

Замечание 2. Частное значение $W(M_m, N_m)$ отображения W представляет собой функцию одной вещественной переменной — решение задачи (1)–(2). Но поскольку ранее мы уже обозначили решение этой задачи через $w(\cdot; M_m, N_m)$, то между W и w имеется следующая связь: $W(M_m, N_m)(\xi) = w(\xi; M_m, N_m)$ (строго говоря, это соотношение и определяет w).

Пусть \mathfrak{E} — отображение, которое каждому $M_m \in \mathbb{C}^m$ ставит в соответствие дифференциальное уравнение семейства $\mathfrak{K}(M_m, \cdot) := \{\mathfrak{K}(M, N_m)\}_{(M, N_m) \in \{M_m\} \times \mathbb{C}^m}$ (см. (1)). Известно (см., например, [1]), что структура решения $W(M_m, N_m)$ задачи $\mathfrak{K}(M_m, N_m)$ зависит от распределения кратностей корней характеристического многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$ (см. (3)) уравнения $\mathfrak{E}(M_m)$. В связи с этим использование явных выражений для $w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)$ с целью установления равномерных по M_m и N_m оценок функций $w^{(i)}(\cdot; M_m, N_m)$ проблематично (исключение составляют случаи $m = 1$ и $m = 2$ — см. работы [2, 3], в которых указанные оценки получены для случая дифференциального уравнения второго порядка ($m = 2$) с постоянными вещественными коэффициентами).

Далее нам понадобится равномерная (по коэффициентам a_i) оценка $\bar{\Lambda}^m$ — максимальной из действительных частей корней характеристического многочлена уравнения $\mathfrak{E}(M_m)$. Её установление будет опираться на непрерывность $\bar{\Lambda}^m$ (как функции M_m), с доказательства которой мы и начнём нашу статью.

2 Доказательство непрерывности $\bar{\Lambda}^m$

Пусть \mathfrak{P} — отображение, которое каждому $M_m = (a_0, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ ставит в соответствие характеристический многочлен уравнения $\mathfrak{E}(M_m)$ (см. (1)):

$$\mathfrak{P}(M_m) := \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - a_1 \lambda - a_0. \quad (3)$$

Отображение \mathfrak{P} будем называть также семейством многочленов. Так как степень многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$ равна m при всех $M_m \in \mathbb{C}^m$, то найдутся такие функции $\lambda^1, \dots, \lambda^m: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, что

$$\forall M_m \in \mathbb{C}^m \quad \mathfrak{P}(M_m) = (\lambda - \lambda^1(M_m)) \dots (\lambda - \lambda^m(M_m)). \quad (4)$$

При этом $\lambda^1(M_m), \dots, \lambda^m(M_m)$ называют корнями многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$. Кортеж $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ функций $\lambda^i: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию (4), назовём полным набором корней отображения \mathfrak{P} . Поскольку при каждом $M_m \in \mathbb{C}^m$ можно по-разному нумеровать корни многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$, то полных наборов корней бесконечно много. Далее под $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ будем подразумевать компоненты одного и того же (выбранного произвольным образом) полного набора корней отображения \mathfrak{P} , а под непрерывностью (на множестве \mathbb{M}) кортежа $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ будем подразумевать непрерывность (на \mathbb{M}) каждой его компоненты.

Обозначим через \mathcal{L} множество всех отображений $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, $M \mapsto (\lambda^1(M), \dots, \lambda^m(M))$, таких что $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ — полный набор корней отображения \mathfrak{P} . Выбор $\Lambda \in \mathcal{L}$ по сути означает задание нумерации корней многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$ для всякого $M_m \in \mathbb{C}^m$ (при этом каждый корень многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$ повторяется столько раз, какова его кратность). Несложно убедиться в том, что при $m \geq 2$ множество \mathcal{L} не содержит ни одного отображения, непрерывного во всём пространстве \mathbb{C}^m (более того, при $m \geq 4$ множество \mathcal{L} не содержит ни одного отображения, сужение которого на \mathbb{R}^m было бы непрерывным, — доказательство см. в [4]). Известно, однако (см., например, [5]), что при любом m для всякой точки $M_0 \in \mathbb{C}^m$ найдётся отображение $\Lambda_{M_0} \in \mathcal{L}$, непрерывное в этой точке.

Замечание 1. Каждое отображение Λ_{M_0} непрерывно в своей точке M_0 . То есть мы заранее фиксируем точку и под неё подбираем отображение, непрерывное в ней. При этом оно может быть разрывно в других точках. Мы можем сменить точку, но тогда, вообще говоря, придётся сменить и отображение. Всякая точка M_0 имеет своё (непустое) множество \mathfrak{S}_{M_0} полных наборов корней отображения \mathfrak{P} , непрерывных в этой точке, и пересечение семейства множеств $\{\mathfrak{S}_{M_0}\}_{M_0 \in \mathbb{C}^m}$ при $m \geq 2$ не содержит ни одного кортежа.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{L} \ni \Lambda: M \mapsto (\lambda^1(M), \dots, \lambda^m(M))$. Тогда функция

$$\bar{\Lambda}^m: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad M_m \mapsto \max\{\operatorname{Re} \lambda^1(M_m), \dots, \operatorname{Re} \lambda^m(M_m)\} \quad (5)$$

непрерывна на \mathbb{C}^m .

Замечание 2. Для всякой точки $M_m \in \mathbb{C}^m$ неупорядоченная совокупность корней многочлена $\mathfrak{P}(M_m)$, а вместе с ней и величина $\bar{\Lambda}^m(M_m)$, не зависят от выбора $\Lambda \in \mathcal{L}$. Таким образом, каждому $\Lambda \in \mathcal{L}$ (то есть каждому способу нумерации корней многочленов семейства \mathfrak{P}) отвечает одна и та же функция $\bar{\Lambda}^m$.

Доказательство леммы 1. Зафиксируем произвольную точку $M_0 \in \mathbb{C}^m$ и выберем в \mathcal{L} отображение $\Lambda_{M_0}: M \mapsto (\lambda_{M_0}^1(M), \dots, \lambda_{M_0}^m(M))$, непрерывное в этой точке. При этом каждая из функций $\lambda_{M_0}^i$ также непрерывна в точке M_0 . Но непрерывность $\lambda_{M_0}^i$ влечёт непрерывность $\operatorname{Re} \lambda_{M_0}^i$, а из непрерывности всех $\operatorname{Re} \lambda_{M_0}^i$, в свою очередь, вытекает непрерывность максимума этих функций. \square

3 Установление экспоненциально-степенных оценок

Обозначим $\Pi_m(C) := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m : |x_1| \leq C, \dots, |x_m| \leq C\}$.

Утверждение 1. Пусть $C_a \geq 0$, $C_w \geq 0$. Тогда найдётся такое $\tilde{C}_m \geq 0$, что

$$|w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{\bar{\Lambda}^m(M_m)\xi} \quad (6)$$

при всех $(i, \xi, M_m, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \Pi_m(C_a) \times \Pi_m(C_w)$, где $w(\cdot; M_m, N_m)$ — решение задачи (1)–(2), $\bar{\Lambda}^m$ — функция из леммы 1.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Обозначим через S_m высказывание утверждения 1. Так как справедливость S_1 очевидна, то остаётся доказать, что для всякого натурального m из S_m следует S_{m+1} .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения $(m+1)$ -го порядка:

$$w^{(m+1)}(\xi; M_m, N_m) = a_m w^{(m)}(\xi; M_m, N_m) + \dots + a_0 w(\xi; M_m, N_m), \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (7)$$

$$w(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = w^0, \dots, w^{(m)}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = w^m \quad (8)$$

и зафиксируем произвольные неотрицательные C_a и C_w . Утверждение S_{m+1} состоит в том, что найдётся настолько большое \tilde{C}_{m+1} , что

$$|w^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| \leq \tilde{C}_{m+1} (1 + \xi^m) e^{\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})\xi}$$

при всех $(i, \xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \overline{0, m} \times [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$, где $w(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1})$ — решение задачи (7)–(8).

Чтобы установить справедливость S_{m+1} (в предположении истинности высказывания S_m) сделаем замену зависимой переменной задачи (7)–(8):

$$w(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = e^{\lambda^*(M_{m+1})\xi} u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad (9)$$

где λ^* — функция, которая каждому $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ ставит в соответствие один из корней (любой) $\lambda_i(M_{m+1})$ характеристического многочлена уравнения (7), действительная часть $\operatorname{Re} \lambda_i(M_{m+1})$ которого совпадает с $\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})$:

$$\operatorname{Re} \lambda^*(M_{m+1}) = \bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1}). \quad (10)$$

Для новой функции $u(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1}) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ получается следующая начальная задача:

$$u^{(m+1)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = b_m(M_{m+1}) u^{(m)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) + \dots + b_1(M_{m+1}) u'(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (11)$$

$$u(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^0(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, u^{(m)}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^m(M_{m+1}, N_{m+1}). \quad (12)$$

Здесь $b_i(M_{m+1}) = \tilde{b}_i(\lambda^*(M_{m+1}), M_{m+1})$, $u^i(M_{m+1}, N_{m+1}) = \tilde{u}^i(\lambda^*(M_{m+1}), N_{m+1})$, где, в свою очередь, $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m)$ и $N_{m+1} = (w^0, \dots, w^m)$, \tilde{b}_i и \tilde{u}^i — известные функции $m+2$ аргументов (полиномиальные по первому аргументу и линейные остальным $m+1$ аргументам). Записывая уравнение (11), мы сразу же учли, что его характеристический многочлен при любом $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ имеет нулевой корень (см. (13)), в связи с чем коэффициент $b_0(M_{m+1})$ при $u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})$ есть тождественный нуль.

Ввиду (9), при каждом $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ корнями характеристического многочлена уравнения (11) будут:

$$\mu_i(M_{m+1}) := \lambda_i(M_{m+1}) - \lambda^*(M_{m+1}), \quad i \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (13)$$

Отсюда и из определения $\lambda^*(M_{m+1})$ вытекает, что

$$\operatorname{Re} \mu_i(M_{m+1}) \leq 0 \quad (14)$$

при всех $(i, M_{m+1}) \in \{1, \dots, m+1\} \times \mathbb{C}^{m+1}$.

Поскольку мы считаем, что точки $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m)$ принадлежат конечному параллелепипеду $P_{m+1}(C_a)$, то для всех корней $\lambda_i(M_{m+1})$ характеристического многочлена уравнения (7) справедливо (см., например, [6]):

$$|\lambda_i(M_{m+1})| \leq 1 + C_a. \quad (15)$$

Но тогда заведомо найдутся такие неотрицательные постоянные C_b и C_u , что

$$|b_i(M_{m+1})| \leq C_b, \quad |u^i(M_{m+1}, N_{m+1})| \leq C_u \quad (16)$$

при всех $(i, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \overline{0, m} \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$.

Понизим порядок уравнения (11), сделав ещё одну замену зависимой переменной:

$$u'(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = v(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}). \quad (17)$$

Функция $v(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1}) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет следующей начальной задаче:

$$\begin{aligned} v^{(m)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) &= b_m(M_{m+1}) v^{(m-1)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) + \dots + \\ &+ b_1(M_{m+1}) v(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad \xi \in (0, +\infty); \end{aligned} \quad (18)$$

$$v(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^1(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, v^{(m-1)}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^m(M_{m+1}, N_{m+1}).$$

Пусть $\nu_1(M_{m+1}), \dots, \nu_m(M_{m+1})$ — корни характеристического многочлена уравнения (18). Поскольку каждое из $\nu_i(M_{m+1})$ одновременно является корнем характеристического многочлена уравнения (11), то для них, так же как и для $\mu_i(M_{m+1})$ (см. (14)), при всех $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ справедливо:

$$\operatorname{Re} \nu_i(M_{m+1}) \leq 0. \quad (19)$$

Заметим ещё, что (см. (16))

$$\begin{aligned} M_m &= (b_1(M_{m+1}), \dots, b_m(M_{m+1})) \in \Pi_m(C_b), \\ N_m &= (u^1(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, u^m(M_{m+1}, N_{m+1})) \in \Pi_m(C_u) \end{aligned}$$

при всех $M_{m+1} \in \Pi_{m+1}(C_a)$ и $N_{m+1} \in \Pi_{m+1}(C_w)$. Последние оценки открывают возможность для применения предположения индукции к функции v , согласно которому найдётся такое $\tilde{C}_m \geq 0$, что (см. (6), (5) и (19))

$$|v^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) \quad (20)$$

при всех $(i, \xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$.

Из (17) и (20) для первых m производных функции $u(\cdot; M_{m+1}, N_{m+1})$ сразу же имеем (здесь и до конца доказательства подразумевается, что $(\xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$):

$$|u^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| = |v^{(i-1)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}). \quad (21)$$

Чтобы оценить саму функцию u , проинтегрируем (17), после чего воспользуемся (12), (16) и (20), а также свойством монотонности и оценкой модуля определённого интеграла:

$$\begin{aligned} \left| u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| &= \left| u(0; M_{m+1}, N_{m+1}) + \int_0^\xi v(\zeta; M_{m+1}, N_{m+1}) d\zeta \right| \leq \left| u^0(M_{m+1}, N_{m+1}) \right| + \\ &+ \int_0^\xi \left| v(\zeta; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| d\zeta \leq C_u + \int_0^\xi \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) d\zeta \leq \tilde{C}_u (1 + \xi^m) \end{aligned} \quad (22)$$

при достаточно большом \tilde{C}_u .

Вернёмся к w . Из (9), (22), (21), (15), (10) и формулы Лейбница (для производной i -го порядка произведения двух функций) при каждом $i \in \overline{0, m}$ и достаточно большом \tilde{C}_{m+1} имеем:

$$\begin{aligned} \left| w^{(i)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| &\leq \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} \left| u^{(j)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| \left| \lambda^*(M_{m+1}) \right|^{i-j} \left| e^{\lambda^*(M_{m+1})\xi} \right| \leq \\ &\leq \left[\tilde{C}_u (1 + \xi^m) (1 + C_a)^i + \sum_{j=1}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) (1 + C_a)^{i-j} \right] e^{\operatorname{Re} \lambda^*(M_{m+1})\xi} \leq \\ &\leq \tilde{C}_{m+1} (1 + \xi^m) e^{\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})\xi}. \end{aligned}$$

□

Замечание 1. Поскольку в силу уравнения (1) производная функции $w(\cdot; M_m, N_m)$ порядка $i \geq t$ является линейной комбинацией её младших производных, то с помощью индукции по i несложно убедиться в том, что для любого целого неотрицательного i найдётся такое $\tilde{C}_m^i \geq 0$, что

$$\left| w^{(i)}(\xi; M_m, N_m) \right| \leq \tilde{C}_m^i (1 + \xi^{m-1}) e^{\bar{\Lambda}^m(M_m)\xi}$$

при всех $(\xi, M_m, N_m) \in [0, +\infty) \times \Pi_m(C_a) \times \Pi_m(C_w)$.

Замечание 2. Если в утверждении 1 вместо прямоугольников $\Pi_m(C_a)$ и $\Pi_m(C_w)$ взять произвольные ограниченные множества \mathbb{D}_a и \mathbb{D}_w (в том числе, состоящие только из действительных чисел), оно, очевидно, останется справедливым.

Замечание 3. Под равномерностью оценки (6) понимается независимость коэффициента \tilde{C}_m от параметров a_i и w^i . В то же время коэффициент в аргументе экспоненты от этих параметров зависит. Таким образом, оценка (6) является, в некотором смысле, лишь наполовину равномерной. Можно, конечно, воспользоваться (15), и заменить в (6) $\bar{\Lambda}^m(M_m)$ на $1 + C_a$, получив полностью равномерную, но вместе с тем, вообще говоря, более грубую оценку. Однако иногда настолько сильное огрубление бывает нежелательным, особенно если при этом происходит смена знака (с отрицательного на положительный) коэффициента при ξ в аргументе экспоненты (как раз о таком случае пойдёт речь ниже).

Пусть \mathbb{D}_a — замкнутое ограниченное множество и пусть известно (например, в силу критерия Гурвица — см. [7]), что $\forall (i, M_m) \in \overline{1, m} \times \mathbb{D}_a \operatorname{Re} \lambda^i(M_m) < 0$. Тогда $\forall M_m \in \mathbb{D}_a \bar{\Lambda}^m(M_m) < 0$, и так как согласно лемме 1 функция $\bar{\Lambda}^m$ непрерывна на всём \mathbb{C}^m (а значит, и на любом множестве \mathbb{D}_a этого пространства), то по теореме Вейерштрасса об экстремальных значениях непрерывной функции $\exists M_m^* \in \mathbb{D}_a \forall M_m \in \mathbb{D}_a \bar{\Lambda}^m(M_m) \leq \bar{\Lambda}^m(M_m^*) < 0$. Отсюда и из утверждения 1 вытекает существование такого $\tilde{C}_m > 0$, что для решения

$w(\cdot; M_m, N_m)$ задачи (1)–(2) при всех $(i, \xi, M_m, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \mathbb{D}_a \times \mathbb{D}_w$ (здесь \mathbb{D}_w — произвольное ограниченное подмножество \mathbb{C}^m) справедливо:

$$|w^{(i)}(\xi; M_m, N_m)| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{-\varkappa \xi}, \quad (23)$$

где $\varkappa := -\bar{\Lambda}^m(M_m^*) > 0$.

В заключение рассмотрим семейство (по параметрам, которые перечисляются ниже) задач Коши для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка $m \in \mathbb{N}$ с коэффициентами, зависящими от параметров t_1, \dots, t_k (кроме того, в качестве параметров по-прежнему выступают начальные значения для решения $w(\cdot; M_k, N_m)$ и его производных):

$$\begin{aligned} w^{(m)}(\xi; M_k, N_m) &= a_{m-1}(t_1, \dots, t_k) w^{(m-1)}(\xi; M_k, N_m) + \dots + \\ &+ a_0(t_1, \dots, t_k) w(\xi; M_k, N_m) = 0, \quad \xi \in (0, +\infty); \\ w(0; M_k, N_m) &= w^0, \dots, w^{(m-1)}(0; M_k, N_m) = w^{m-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $M_k = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{D}_t \subseteq \mathbb{C}^k$, $N_m = (w^0, \dots, w^{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, $a_i : \mathbb{D}_t \rightarrow \mathbb{C}$.

Утверждение 2. Пусть \mathbb{D}_t — замкнутое ограниченное подмножество \mathbb{C}^k , \mathbb{D}_w — ограниченное подмножество \mathbb{C}^m , $a : \mathbb{D}_t \ni M_k \mapsto (a_0(M_k), \dots, a_{m-1}(M_k)) \in \mathbb{C}^m$, функции a_0, \dots, a_{m-1} непрерывны на \mathbb{D}_t , $\forall M_k \in \mathbb{D}_t \bar{\Lambda}^m(a(M_k)) < 0$ (здесь $\bar{\Lambda}^m$ — функция из леммы 1). Тогда найдутся такие $\tilde{C}_m \geq 0$ и $\varkappa > 0$, что

$$|w^{(i)}(\xi; M_k, N_m)| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{-\varkappa \xi}$$

при всех $(i, \xi, M_k, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \mathbb{D}_t \times \mathbb{D}_w$, где $w(\cdot; M_k, N_m)$ — решение задачи (24).

Доказательство. Поскольку $a(\mathbb{D}_t) =: \mathbb{D}_a$ — ограниченное замкнутое подмножество \mathbb{C}^m , то для доказательства справедливости утверждения 2 достаточно заметить, что

$$\max_{M_k \in \mathbb{D}_t} \bar{\Lambda}^m(a(M_k)) = \max_{M_m \in \mathbb{D}_a} \bar{\Lambda}^m(M_m),$$

и, положив $\varkappa := -\max_{M_k \in \mathbb{D}_t} \bar{\Lambda}^m(a(M_k))$, воспользоваться оценкой (23). \square

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения: Учеб. Для вузов. Курс высшей математики и мат. физики. — 3-е изд. — М. : Наука. Физматлит, 1998.
2. Букжалёв Е. Е. Об одном способе исследования задачи Коши для сингулярно возмущённого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 10. — С. 1661–1675.
3. Букжалёв Е. Е. Итерационный метод решения задачи Коши для сингулярно возмущённого слабо нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2017. — № 3. — С. 10–17.
4. Е. Е. Bukzhalev, “On the Global Continuity of the Roots of Families of Monic Polynomials (in Russian),” *ArXiv e-prints* (Sept., 2017) , [arXiv:1710.00640](https://arxiv.org/abs/1710.00640) [math.CA].

5. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. — М. : Издательство иностранной литературы, 1963.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том II. Дальнейшее построение теории. — 2-е, исправленное и дополненное изд. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967.