QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, réels, le Tore, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules geodesiques, traces de Sobolev et fonctions de Green et un Théorème de Dualité, le degré topologique de Leray-Schauder et des points fixes topologiques (en particulier, application en dimension 2), les solutions topologiques dans le cas negatif (critique et supercrtique, Eq de courbure scalaire prescrite negatif et Eq. supercritique negatif), la metrique induite sur un ouvert Lipschitzien, les coordonnées geodesiques polaires et la formule de Gauss-Bonnet et sur le Théorème de la masse positive en dimension 3 et dans le cas conformément plat. Et le flot de Ricci et sur les inégalités du type $\sup u = f(\inf u)$, et sur la théorie de Yang-Mills et la relativité générale et la cosmologie quantique et leur relation avec l'equation de Yamabe et de la courbure prescrite et du type courbure prescrite. Et des obstructions d'astronomie. Et sur les cordes, supercordes et D-branes.

1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Haussdorf et la formule dintegration par parties (Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ?) : $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ alors la mesure $H^{n-1}_{|\partial\Omega}$ est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit $A \subset \partial\Omega$, $H^{n-1}_{|\partial\Omega}$ mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon,\ H^{n-1}_{|\partial\Omega}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a, $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$, avec V_ϵ ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Dapres le Theoreme dUrysohn ;

$$\exists\ f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+),\ 0 \leq f_\epsilon \leq 1,\ f_\epsilon \equiv 1,\ \text{sur } K_\epsilon,\ suppf_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient ν_1, ν_2 les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

Ω est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Haussdorf $H^{n-1}_{|\partial\Omega}$, ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et $|D\chi_\Omega| = H^{n-1}_{|\partial\Omega}$:

$$\int_\Omega div\varphi = -\int_{\partial\Omega} \varphi\nu_1 dH^{n-1} = -\int_{\partial\Omega} \varphi\nu_2 dH^{n-1},\ \forall\ \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0,\ \forall\ \varphi \in C^1_c,$$

Comme C^1_c est dense dans C^0_c, la formule precedente est vraie pour $\varphi \in C^0_c$

On applique cette formule a f_ϵ, on obtient pour tout mesurable A :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \to 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2,\ H^{n-1}_{|\partial\Omega}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale exterieure est la normale exterieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure"("blow-up") est l'espace tangent usuel).

La formule d'integration par parties est bien connues. Pour sa preuve, voir les livres de Fusco (bords avec singularités par recouvrement et suite de compacts $K_n \to \partial\Omega - \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers), Necas et Azé.

La formule d'integration par parties sur un domaine singulier en un nombre fini de points en dimension 2 (par exemple) :

La formule est locale, on considere $B(x_j, 1/n)$ avec x_j un point singulier du bord. La formule est locale, par un recouverement et une partition de l'unité on ecrit que (voir le Azé, dans chaque partie du recouvrement et on rajoute la boule où il y a la singularité $B(x_j, 1/n)$) :

$$\int_\Omega div((1-\alpha_n)u)dx = \int_{\partial\Omega}(1-\alpha_n)ud\sigma,$$

avec α_n une fonction reguliere et à support compact dans $B(x_j, 1/n)$, $\alpha_n \equiv 1$ dans $B(x_j, 1/2n)$. Avec le fait, $|\nabla\alpha_n| \leq Cn$ et $\mu_L(B(x_j, 1/n)) \leq C/n^2$ et $H_1(\{x_j\}) = 0$, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle (ici, on l'a fait pour le point x_j). Puis on fait tendre $n \to +\infty$. On obtient la formule de Stokes ou Green-Riemann pour un domaine contenant un nombre fini de singularités au bord.

2) Pourquoi quand on a $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar\Omega)$, $tr(u) = u$? on utilise Necas et Brezis :

On a :

Ω est un ouvert Lipschitzien $\Rightarrow$ cartes Lipschitziennes $\Rightarrow$ un operateur de Prolongement $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, d'apres la consturction de loperateur de Prolongement dans des cartes, $Pu_{|\bar\Omega} = u$ et, $\chi_n(\rho_n * Pu) \to Pu$ dans $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $W^{1,p}$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc :

$$||Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)||_{L^p(\partial\Omega)} \to 0,$$

Et,

$$||Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u||_{C^0(\partial\Omega)} \to 0,$$

Doù,

$$Tr(u) = u, \; H^{n-1}_{|\partial\Omega} p.p,$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_\Omega = \lim_{\rho\to 0} \frac{\int_{B_\rho(x)} u(y)dy}{|B_\rho(x)|}$$

on voit que si $u \in C^0(\bar\Omega)$, $Tr(u) = u$.

3) Pourquoi $W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1}, tr(u) = 0\}$ avec Ω ouvert Lipschitzien. Voir le livre de Necas. On raisonne par rapport aux suites ($\exists\ u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_i \to u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour les traces et la restrictions a des sous ensembles d'ouverts Lipschitzien)).

a) On considere $\tilde u = u \times 1_\Omega \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ par integration par parties et formule de Stokes.

b) Par des cartes et on multipliant par une fonction test a support compact, localement $\tilde u \in W^{1,1}(Q)$ avec Q un n-cube "au dela" du bord et nulle avant d'atteindre les cotes du bord qui sont interieurs.

On considere alors $\tilde u_\lambda$, "la translatée" de $\tilde u$ suivant la direction normale au bord. le support de $\tilde u_\lambda$ est compact et strictement á l'interieur du domaine.

On a : (on applique ces idées à un cube infini dans la direction normale au bord image (locale) de $\partial\Omega$, puis on se restreint au n-cube de depart. Sur les bords, la restriction de l'homeorphisme Lipschitzien envoie les traces sur les traces par la formule de l'aire ou coaire. (par convergence de suites sur des ouverts Lipschitziens).).

$\tilde u_\lambda \in W^{1,1}(Q_{-\lambda})$ avec,

$\nabla(\tilde u_\lambda) = (\nabla\tilde u)_\lambda$.

puis en utilisant des fonctions tests dans Q on obtient :

$\tilde{u}_\lambda \in W^{1,1}(Q)$ pour λ assez petit.

Le support de $\tilde{u}_\lambda$ est strictement dans Q, on obtient alors, $\tilde{u}_\lambda \in W_0^{1,1}(Q)$.

Par un theoreme de la moyenne (voir Necas, $\tilde{u}$ s'annule en dehors de Q), on obtient $\tilde{u}_\lambda \to \tilde{u}$ dans $W^{1,1}$. Donc, $\tilde{u} \in W_0^{1,1}$ et $u \in W_0^{1,1}$.

4) Soit (M,g) une variete riemannienne et soit $B_r(x)$ une boule geodesique tres petite, telle que l'exponentielle realise un diffeomorphisme sur la boule de $\mathbb{R}^n$: pourquoi, la normale exterieure $\nu = \partial_r$?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$d(exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i$, on identifie les 1-formes dx_i et $d\tilde{x}_i$.

Soit B^0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\tilde{B}^0$ la base $\{\tilde{\partial}_1, ..., \tilde{\partial}_n\}$ la base canonique de la boule geodesique $B_r(x)$, alors $d(exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$.

La base $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, ..., \partial_{\theta_{n-1}}\}$ est directe, donc $det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$.

Soit $\tilde{B}_r = \{d(exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(exp_x)(\partial_{\theta_1}), ..., \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$, alors :

$det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [det : B_r \to B_{0,r}] o [det : B_{0,r} \to B_r, \text{ qui est directe}] o [det : B_r \to \tilde{B}_{0,r}] > 0$

La premiere est $d(exp_x)^{-1}$ et la derniere $d(exp_x)$ le determinant selimine, il reste celui de $B_{0,r}$ vers B^0 qui est direct.

Donc la base $\tilde{B}_r$ est directe par rapport a la base $\tilde{B}^0$.

n_{ext} est definit precisement comme cela tel que $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, ..., \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$ est directe par rapport a $\tilde{B}^0$.

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient ω_θ et Ω les formes volumes sur la sphere $S_r(x)$ et la boule $B_r(x)$ n_{ext} est tel que son dual n_{ext}^* verifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_\theta = \Omega,$$

Cest-a-dire que à des constantes multiplicatives pres (determinant des metriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge ... \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge ... \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, ..., \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est a dire que la base $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, ..., \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$ est directe par rapport a la base $\{\tilde{\partial}_1, ..., \tilde{\partial}_n\}$ et donc $n_{ext} = \partial_r$.

Voir aussi le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine où la normale exterieure est definie par le produit interieur. (Par rapport à la base du bord et l'element de volume du bord) On a le meme resultat.

Par sa construction, la boule geodesique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par raport à la carte (Ω, φ) à partir de laquelle elle construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact K en utilisant l'exopentielle et cette propriété d'orientabilité des boules geodesiques via l'exponentielle, il faudera supposé la variété orientable.

5) Dans la construction de la fonction de Green pour un operateur coercif $\Delta + a$ voir le livre d'Aubin et le monograph de Frederic Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'etape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$, car la parmetrix H_x verifie au sens C_0^2 (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les Γ_i verifient cette proprité, elles sont nulles au bord car leur support est dans $B(m, \delta_m/2)$ et le rayon dinjectivité $= \delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$. Puis on utlise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser G_x dans lequation et utiliser les Theoremes de Gilbarg-Trudinger :

$$\Delta(V_x-\eta G_x)+a(V_x-\eta G_x)=-\Delta(\eta G_x)+a(\eta G_x)\in L^p,\ \text{et}\ (V_x-\eta G_x)=0,\ \text{sur}\ \partial M,$$

Avec η une fonction cutoff egale a 1 dans un voisinage de ∂M et 0 au voisinage de x (nulle au voisinage de la singularité).

On obtient $V_x-\eta G_x\in W^{2,p}(M)$ et comme $\eta G_x\in W^{2,p}(M)$, alors : $V_x\in W^{2,p}(M)$.

Remarques :

1) Dans la formulation variationelle on pour une solution $u\in W_0^{1,2}$ de :

$$-\Delta u+au=f,\ \text{et}\ u=0\ \text{sur}\ \partial M,$$

Dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions $W_0^{1,1}$), ils prouvent que ces solutions sont au sens C_0^2 (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont $W^{2,p}$ et qu'on a les estimations a priori dans $W^{2,p}$ d'Agmon (méthode des quotients differentiels) ou en sachant qu'elles sont $W^{2,p}$ qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund ecrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inegalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergartion par parties, par rapport a la variable $t>0$) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu=0,\ u=\varphi\,\text{sur}\ \partial\Omega$$

On peut supposer L le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuité on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenebrg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans linegalité obtenue ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on ecrit à l'ordre 1 :

Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson $P(x,t)=\dfrac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}$.

On suppose que $\varphi\in C^2\cap W^{2,p}$. On ecrit :

$$\partial_s(P(x-y,t+s)\varphi(y,s))=\partial_s P\varphi+P\partial_s\varphi,$$

On intergre en y et s et on obtient (on utilise la representation integrale de u en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}P(x-y,t)\varphi(y,0)dy=\int P(x-y,t+T)\varphi(y,T)+\int\int\partial_t P\varphi+\int\int P\partial_t\varphi,$$

On a $\partial_t P\equiv\dfrac{1}{|Q|^{n+1}}$, Q un point quelconque, et $dim(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})=n+1$, on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour $\partial_t u,\partial_x u$, on derive sous le signe $\int$ et puis on integre par parties sur $\mathbb{R}^n$. On obtient des integrales du type,

$$\int\int\partial_t P\partial_t\varphi,\ \int\int\partial_t P\partial_x\varphi,\ \text{et}\ \int\int\partial_x P\partial_t\varphi$$

.

On elimine $\int P(x-y,t+T)\varphi(y,T)$ par son estimation en $c(T)\to 0$ quand $T\to+\infty$.

On obtient des estimations du type :

$$||\partial u||_{L^p}\leq C||\varphi||_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on ecrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

6) Sur le degré topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la definition du degré topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, deg[x - F(x, T_0)B_{R_2}, 0] = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x,t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$, cela veut dire quon peut utiliser l'homotopie :

$deg[x - F(x,t), B_{R_2}, 0] = deg[x - F(x,0), B_{R_2}, 0] = deg[x - F(x,T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$

$t = 0$, $F(x,0) = \Phi(x)$ et par Nussbaum et la propriété d'excision et d'additivité, on peut décomposer le degre en 2, la condition est que $\Phi(x) \neq x$ sur ∂B_{R_1} et $\Phi(x) = F(x,0) \neq x$ sur ∂B_{R_2}, alors :

$$0 = deg[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + deg[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0],$$

La derniere condition est celle de l'homotopie avec l'identité et le degre de l'identité est 1.

$deg[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = deg[x, B_{R_1}, 0] = 1,$

Donc,

$$deg[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation integrale $\int_\Omega f(u(x)+t)dx \leq C$, C independante de t et les estimations a priori pour verifier que les conditions d'applications du degré topologique sont verifiées, dans ce cas les t et les solutions sont uniformément bornés.

Concernant l'article de Crandall-Rabinowitz, il traite du cas où en particulier on a un terme nonlineaire du type exponentiel. Grace à la condition de stabilité (ils prennent des fonctions tests particulieres), ils prouvent que la masse et le volume ou energie, sont bornées (jusqu'a la dimension 10).

La formulation du degré précédente s'applique aux equations en $\sinh$ sans poids ou avec poids, pour le laplacien ou l'operateur plus general que le laplacien, en dimension 2 par exemple. Voir l'article de Brezis-Turner et vers la fin de ce print, sur le degré en dimnension 2 et pour des systemes avec singualrités.

7) Sur les surfaces $K3$. Soit E un fiber bundle (fibré vectoriel) et M une variété Complexe de metrique h.

Remarquons dabord que cette varitété est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien réel est le carré du Jacobien complexe, cest du a l'holomorphie, comme en dimension 2 (equation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fibre bundle E, il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphie et la metrique, c'est l'analogue complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable a la connexion de Levi-Civita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une derivee covariante, on a la courbure, on derive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern , cest la classe de Ricci.

Connexion de Chern $\Rightarrow$ symboles de Christofels $\Rightarrow$ Connexion form, ω, $\Rightarrow$ Curvature form,

Dans le cas $E = \wedge^2 T^*(M)$ les 2-formes alternees :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$, car ici,ce qui joue le role de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur E (les vecteurs de base sont les 2-formes alternees), les champs de 2-formes aleternees,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$,des qu'on dérive encore deuxieme fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces $K3$, $E = \wedge^2 T^*(M) = 0$, 2 formes alternees :

Si $E = 0$, la connexion nulle convient pour la derivation sur E or la connexion de Chern est unique dou $\nabla \equiv 0$. Donc, il ny a pas de courbure do la classe de Chern est nulle, $c_1 = 0$.

Les groupes de cohomologies sont connues :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les varietes complexe, il faut prendre la dimension complexe 2 et non reelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualite de Serre, cela va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la theorie de Hodge, on prend la dimension reelle 4, avec la convention $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \le p,q \le 2\}} H^{p,q}$, p, q varient selon la dimension complexe, quand on inverse p et q on a par la conjuguaison complexe , la meme dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault, $H^{0,1}$ est isomorphe à la cohomologie de Cech $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, O_S)$ car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions O_S et par definition $H^1(S, O_S) = 0$ d'ou $h^{0,1} = dim H^{0,1} = dim H^1(S, O_S) = 0$). On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau) sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe) ,on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la carcateristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension reelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne $X = S = K3$:

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \dfrac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$, avec c_1 la premiere classe de Chern et c_2 la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure Ω

$det(\Omega - tI) = 1 + tr(\Omega) + \Omega \wedge ... = 1 + c_1 + c_2$,

L'integrale $\int c_2$ est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas dune surface $K3$, cest donc $\chi(K3) = \int c_2 = 24$.

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type $dx^j \wedge dx^k$ et c_2 est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme :$\int c_k$ avec c_k la $k-$ieme classe de Chern.

Comme la surface $K3$ est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possede une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec $(K3, h, \nabla)$ on a une structure hermitienne et par Siu, $K3$ est Kahler, c'est a d ire que la structure Riemannienne $(K3, g = Re(h), \nabla_g)$ est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Civita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euleur-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (Ricci_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface $K3$ possede une metrique non-loclamment conformement plate.

a) Le Projectif complexe de dimension complexe $n \geq 2$ est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possede (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Civita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Pourquoi la courbure sectionelle du projectif complexe de dimension $n \geq 2$ est non-constante : C'est ecrit dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

a) Ils utlisent l'equation des champs de Jacobi, pour determiner le tenseur de Riemann.

b) Ils utlisent la multiplication par le nombre complexe, i, la structure complexe, J. Et le fait que H_x sont les vecteurs orthogonaux a z et iz, $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$.

Ils utilisent la variations $H(t, s)$ et les champs de Jacobi.

La courbure sectionelle pour u, v est calculée a partir du champs de Jacobi, $Y(s) = cossu + sinsJv$:

$$K(u, v) = 1 + 3sin^2 s.$$

qui n'est pas constante.

b) Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique a la sphere de dimension 2 reelle et donc de curbure sectionnelle constante. C'est une surface de Riemann reelle (donc localement plate).

Pourquoi, le Projectif complexe de dimension 2 est isometrique à la sphere de dimension 2. Voir le Gallot-Hulin-Lafontaine :

1-On utilise le quotient par un groupe de Lie. Comme le groupe de Lie agit proprement et transitivement et..., cela veut dire qu'il existe une structure de variété sur le quotient $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ telle que l'application de passage au quotient soit une submersion.

2-Le fait qu'on ait une submersion, on utilise la definition, localement, on a des sous-variétés, on construit, par des cartes, une base du noyau et apres un procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, on construit un supplementaire orthogonal. l'application de passage au quotient est bijective sur ce supplementaire. ce qui permet de constuire localement un "lift".

3-On definit la metrique sur le quotient de telle maniere que l'application de passage au quotient soit une isometrie, on la construit a partir du lift et par projection sur H_x.

(Remarque : soit $p(x) = [x]$ l'application de passage au quotient et γ une isometrie, $x = \gamma^{-1} o \gamma(x) \Rightarrow [x] = [\gamma(x)] \Leftrightarrow p(x) = po\gamma(x)$, ceci est important dans la consturction de l'isometrie en prouvant que cela ne depend pas de point de la fibre).

On voit que pour le cas de $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$, que la metrique du projectif est celle de la 3-sphere pour des vecteurs particuliers v, w, par exemple orthogonaux à z et iz avec $z \in \mathbb{S}^3$. (le produit scalaire sur H_x est egal a celui pour l'espace tangent au quotient).

Par exemple si on prend $z = (1, 0) = [(1, 0), (0, 0)]$ en notation complexe, les v, w sont de la forme $v = (0, v_1)$, $w = (0, w_1)$. Puis en utlisant l'apllication H du Gallot-Hulin-Lafontaine $H(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$ et les chemeins $u(t) = costz + sintv$, $w(t) = costz + sintw$, (on se ramene à ce cas par une roation car la variété est invariante par $U(n + 1)$, les rotations complexes,(elle est construite à partir de S^{2n+1}), on a :

$$< H(u(t))', H(v(t))' >_{\mathbb{S}^2 {}_{t=0}} =< v, w >_{\mathbb{S}^3} =< v, w >_{\mathbb{P}^1(C)} .$$

Cela veut dire que,

$$H^*(g_{\mathbb{S}^2}) = g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}.$$

Remarque : Les revetements riemanniens, sont similaires, au lieu d'avoir une submersion, on a un diffeomeorphisme local. Voir, le Gallot-Hulin-Lafontaine, pour la contruction du Tore et des projectifs reels (leur metriques).

Dans le cas des revetements, puisqu'il y a un diffeomorphisme local, la courbure sectionelle se conserve (voir le Hebey). On voit alors, dans la construction du projectif réel et le Tore, que la courbure sectionelle est constante, donc, elles sont conformement plates.

On a la meme chose avec les groupes de Lie et les espaces homogenes. On a une fibration qui est une submersion et on construit une metrique $G-$ invariante par le meme procédé que les submersions et les revetements. De plus, si par exemple, on considere $P_n(C)$, les groupes unitaires (les rotations comlexes) $U(n + 1)$ et $SU(n + 1)$ agissent transitivement et proprement sur $P_n(C)$ par l'intermediaire de la sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$.

1- $P_n(C)$ est à la fois identifiable à $U(n + 1)/U(1) \times U(n)$ et $SU(n + 1)/S(U(1) \times U(n))$. De plus, comme on la vu dans le cas des submersions, pour connaitre la metrique de $P_n(C)$, il suffit de se placer sur la sphere S^{2n+1}, car on prend H_x l'orthogonal de z et iz, avec $z \in S^{2n+1}$. Pour ce qui concerne les groupes de Lie, la formule donnant la metrique $G-$ invariante est egale à (C designe le produit scalaire dans $\mathbb{C}$) :

$$< x|y >_{[e], P_n(C)} = \int_{H_1} < Adh_1.x|Adh_1.y >_C dv_{H_1}$$

Or, dans l'espace des matrices, la derivee de l'adjoint est connue et est egale, (on raisonne par rapport aux chemins et en particulier de l'exponentielle) :

$$Adh_1.x = Ad_{G/H}h_1.x = h_1^{-1}.x.h_1,\ Adh_1.y = h_1^{-1}.y.h_1,$$

avec l'identification, $x = [x] = u$, $[x] \in SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ et $x = u \in H_x \subset \mathbb{C} \equiv P_n(C)$.

Car ici, $G/H = P_n(C)$ et on prend le plan tangent et dans ce cas il faut prendre des vecteurs de H_x donc de S^{2n+1}, (raisonner par rapport a l'exponentielle et les chemins). ($t \to \exp(tx)$ est un bon chemin et en plus quand on derive on a l'adjoint). (on se ramene au produit scalaire de S^{2n+1}.

$G = SU(n+1), H = G_m = S(U(1) \times U(n))$.

Remarque : La metrique sur G/H est definie de telle maniere que la correspondance : F : $[x] \in G/H \to u \in P_n(C)$ soit une isometrie. (voir le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine, sur la correspondance via S^{2n+1} entre $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ en tant que groupe de Lie et $P_n(C)$ via $\mathbb{S}^{2n+1}$. Donc, on retrouve le fait que les metriques sont proportionnelles. (Eux, ils notent $U(n+1)/U(1) \times U(n)$).

Gallot-Hulin-Lafontaine disent qu'on peut pendre "any scalar product on $T_e(G/H)$. Comme G/H s'identifie par F à $P_n(C)$, on choisit le produit scalaire tel que F soit une isometrie vers le projectif complexe. Ce qui revient à obtenir le produit scalaire du projectif complexe.

Finalement, on ecrit, puisque $\bar{h}_1^t h_1 = 1$ et $(\bar{h}_1^{-1})^t h_1^{-1} = 1$:

$$< x|y >_{[e],P_n(C)} = \int_{H_1} < (h_1^{-1}.y.h_1)^t | h_1^{-1}.x.h_1 >_C dv_{H_1} =$$

$$= \int_{H_1} < (h_1^{-1})^t.y^t.(h_1^{-1})^t | h_1^{-1}.x.h_1 >_C dv_{H_1} =$$

$$= \int_{H_1} < y^t | x >_C dv_{H_1} = \mu < x|y >_{\mathbb{C}},$$

avec, $\mu > 0$ et $x, y \in H_x$, on reconnait le produit de deux vecteurs de S^{2n+1} qui donne le produit scalaire dans $P_n(C)$.

Ce qui a été prouvé est que la metrique $G-$invariante est egale à la metrique usuelle du projectif complexe.

Pour savoir directement, que le projectif complexe est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante. Utiliser le livre de Kobayashi-Nomizu, tome 2, pour avoir l'expression de la metrique ou et le livre d'Aubin, pour avoir l'expression du tenseur de Ricci, et par les calculs, directement, on prouve qu'il est d'Einstein. Pour a courbure sectionelle, voir aussi dans, le livre de Kobayashi-Nomizu, K, K_0, dans le chapitre Complex manifolds. Avec la metrique tirée du livre de Kobayashi-Nomizu, la courbure sectionelle holomorphe est constante, ce qui induit que la courbure sectionelle Riemannienne est de la forme :

$$K(X,Y) = (1 + 3(cosa)^2)/4,\ a,\ l'angle\,de\,g(X, JY).$$

Ici, par la fomulation de Gallot-Hulin-Lafontaine avec la phrase "any scalar product", on transporte la metrique du projectif, pour avoir une structure d'espace homogene, une structure de plus sur le projectif complexe par l'isometrie (par definition et choix) de $SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$.

(On a une isometrie F entre la variété homogène $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ et $P_n(C)$, la courbure de la varété homogeène est alors $RiccioF$ (voir le Hebey), elle constante).

En tant que submersion :

Pour voir que la metrique de $P_n(C)$ est celle de S^{2n+1}/S^1, du Gallot-Hulin-Lafontaine, on ecrit que la metrique ds du Kobayashi-Nomizu est a la fois invariante par "rotation", on se place alors dans la carte de $z = (1, 0, \ldots 0)$ avec la carte $(t_i) = (z_i/z_0)_{(1 \leq i \leq n)}$, on ecrit alors ds en coordonnées z_i et la metrique en z est euclidienne sur les vecteurs de $\mathbb{C}^n = H_x$, or la metrique de S^{2n+1}/S^1 dans H_x est la metrique de S^{2n+1} qui est la metrique euclidienne de $\mathbb{C}^n = H_x$. Donc la metrique ds, dite de Fubini-Study dans le Kobayashi-Nomizu est la metrique dite de Fubini-Study dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

Remarque sur les espaces homogènes : Tout ce travail sur les groupes de Lie, sert en fait pour les ensembles de matrices. Cette Théorie est construite pour les groupes matriciels, $SU(n+1), SO(n)$... (pour ces cas particuliers, les variétés sont de dimensions finies).

(Remarque sur les actions de groupes : le fait d'ecrire ., le point, dans l'action de groupe, c'est une notation, pour dire que le groupe agit sur cet ensemble, comme c'est ecrit dans le debut du chapitre sur les groupes de Lie dans le Dieudonné, c'est une notation d'ecrire la derivation, $s \cdot k_x$ dans l'espace tangent $T_e(G)$, pour ecrire la composition de la derivation, $\partial\psi/\partial\xi_j(s,\xi_1,\ldots,\xi_n)k_j$. On voit bien par la formule de derivation de la composition, on a $s\cdot(t\cdot k_x)$ remplace $\partial_{\rho_i}(s,\rho)\partial^i_{\xi_j}(t,\ldots)$

(Cette notation, (d'action de groupe, $\cdot$, le point), permet d'expliquer pourquoi l'espace tangent $T_e(G/H)$ s'identifie à $T_e(G)/T_e(H) = G_-/H_-$. Car en prenant des chemins, $c : t \to [g(t)]$ dans G/H et en les derivant cela revient à prendre l'action de la classe dans le quotient : $\frac{dc(t)}{dt} = \{\frac{d(g(t).h)}{dt}\cdot h, h\in H\} = \{g'\cdot h, h\in H\} = [g'].T_e(H) = classe\, de\, g'$, car on derive un chemin suivant H donc dans l'espace tangent à H.)

Le paragraphe suivant, traite du cas du projectif complexe et l'exercice proposé dans le Gallot-Hulin-Lafontaine, on a vu comment la submersion construite permet d'identifier $P_n(C)$ et S^{2n+1}/S^1, on regarde aussi comment le projectif est vu comme un espace homogene en comparant S^{2n+1}/S^1 et $SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$:

(***Voir l'exercice sur le projectif complexe dans le Gallot-Hulin-Lafontaine, ici, aussi, on utilise les chemins dans la determination des espaces tangents en $e = I_n$ ou algebre de Lie, on derive par exemple $(I_n+H)(I_n+H^t) = I_n$ en prenant $dH/dt_{t=0} = A$, pour $U(n)$, on voit alors que A est antihermitienne. Pour $SU(n)$, on derive le determinant en I_n on a de plus $Tr(A) = 0$ et l'application adjointe est l'application adjointe reellement, quand on calcule hxh^{-1} avec $x = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{v} \\ v & 0\end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$; $h^{-1} = \bar{h}^t = \begin{pmatrix}\bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{A}\end{pmatrix}$

$hxh^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda A\bar{v} \\ \bar{\lambda}Av & 0\end{pmatrix}$,

De plus pour voir que $x \in T_e(G)/T_e(H) = G_-/H_-$ est de la forme precedente, on a $T_e(G)$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes de trace nulles et $H = S(U(1)\times U(n))$, $T_e(H)$ est l'ensemble des matrices antihermitinnes, comme on quotient par $T_e(H)$ on elimine les termes centraux et x a la forme precedente. On voit alors que la condition d'irreductibilité isotope est vraie ici, la definition est :$\forall\lambda, \forall A, \forall w \in W, \bar{\lambda}Aw \in W \Rightarrow W = \{0\}$ ou $W = G_-/H_-$. Et aussi, pour le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$ des matrices est invariant par l'adjoint, hxh^{-1}, le produit scalaire choisit fait reference à la phrase du Gallot-Hulin-Lafontaine "any scalar product", ici c'est le plus simple, celui des matrices. En outre, ici, si on considere la matrice de la courbure de Ricci, $Ricci$ c'est une matrice symetrique donc diagonalisable. Ici, pour le cas du projectif complexe, on prend le produit scalaire $(M_1\cdot M_2)$ avec M_1, M_2 deux matrices de la forme hxh^{-1} avec h, x, y trois matrices comme ci-dessus, cela revient à avoir le produit scalaire usuel $< \bar{\lambda}\lambda\bar{v}^t\bar{A}^tAw >_{\mathbb{C}} = < v|w >$, car $A \in U(n)$ et $\lambda \in U(1), |\lambda| = 1$.

On regarde alors si l'application $\tilde{F}$ du livre de Gallot-Hulin-Lafontaine est une isometrie avec les bons produits scalaire (ce qu'on a dit au debut de ce point avec $[x] \in G/H = SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$ et $u \in P_n(C) = S^{2n+1}/S^1$) :

Soit $\tilde{F}$, l'application du livre de Gallot-Hulin-Lafontaine; $[x] \to \tilde{[x.m]} = q(x.m), [x] \in G/H = SU(n+1)/S(U(1)\times U(n)), \tilde{[x.m]} \in S^{2n+1}/S^1$ et $q : y \to \tilde{[y]}$, l'application du passage au quotient de $S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1$. $\tilde{F}$ est un diffeomorphisme. On prend alors $m = z = (1,0,...,0)$ et on se place dans la carte de m, $(t_k) = (z_k/z_0)$, voir le Gallot-Hulin-Lafontaine dans la construction de la metrique de Fubini-Study de S^{2n+1}/S^1.

Alors $T_m(S^{2n+1}) = \{(i\eta, \xi^1, ..., \xi^n), \eta \in \mathbb{R}, \xi^j \in \mathbb{C}, 1 \le j \le n\}$. Si on prend $t \to x(t)$ un chemin dans $SU(n+1)$ alors $x'(t) = dx/dt \in T_e(SU(n+1))$ est une matrice antisymetrique de trace nulle et $(dx/dt)\cdot m = (0, v_1, v_2, ...v_n) = (0, v)$ est orthogonal a m et $i.m$, et donc, $(dx/dt)\cdot m \in H_m$, le sous espace vectoriel qui permet de definir le produit scalaire dans S^{2n+1}/S^1, de meme pour $(dy/dt)\cdot m = (0, w_1, ..., w_n) = (0, w) \in H_m$. (Ne pas confondre H_m l'espace vectoriel ici dans la definition de la metrique de Fubini-Study et H_m l'espace isotrope dans la definition de $G/H = G/G_m$). (On peut prendre x tel que $dx/dt = x$ avec des termes centraux nuls, comme ci-dessus).

Comme par definition q est une isometrie sur H_m, on a :

$$< (dx/dt)\cdot m|(dy/dt)\cdot m > = < dq[(dx/dt)\cdot m]|dq[(dy/dt)\cdot m] > =$$

$$=< (d/dt)[q(x.m)]|(d/dt)[q(y.m)] >=< (d/dt)[\tilde{F}(x)]|(d/dt)[\tilde{F}(y)] >=$$

$$=< d\tilde{F}(dx/dt)|d\tilde{F}(dy/dt) >,$$

donc, $\tilde{F}$ est une isometrie, ce qui permet de transporter la metrique de Fubini-Study.

De plus, le produit scalaire :

$$< (dx/dt) \cdot m|(dy/dt) \cdot m >=< (dx/dt) \cdot m|(dy/dt) \cdot m >_{H_m}=< v|w >_{\mathbb{C}}=$$

$$= [(dx/dt) \cdot (dy/dt)] =< (dx/dt)|(dy/dt) >,$$

est le produit scalaire sur le matrices et coincide avec $(M_1 \cdot M_2)$ de ce qu'on a dit precedemment et avec le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n = H_m$, de la metrique de Fubini-Study, si on prend par exemple $dx/dt = x$ avec des termes contraux nuls. Le produit scalaire choisit sur l'espace homogene (de matrices) induit que, $\tilde{F}$, une isometrie sur S^{2n+1}/S^1. C'est ce qu'on disait au debut de cette section sur les espaces homogenes, de maniere theorique, on choisit le produit scalaire de sorte que $\tilde{F}$ soit une isometrie et donc on transporte la metrique. Ici, pour le cas du projectif complexe, le produit scalaire qu'on pris, fait de $\tilde{F}$ une isometrie.***)

Concernant la courbure de Ricci et le fait qu'on a le projectif comme espace homogene d'Einstein, sans les calculs :

On a parlé de la notation . d'action de de groupe, comme le groupe de Lie agit par isometries, dans la derivation on obtient des termes du type, dans le tenseur de courbure :

$$R(h'.X, h'.Y, h'.Z, h'.T) = R(X, Y, Z, T)$$

en composant à droite par l'inverse, on obtient l'application adjointe :

$$R(h'.X.h'^{-1}, h'.Y.h'^{-1}, h'.Z.h'^{-1}, h'.T.h'^{-1}) = R(X, Y, Z, T)$$

ce qui veut dire que le tenseur de courbure est invariant par l'application adjointe $h.x.h^{-1}$, donc la courbure de Ricci aussi et par invariance des sous-espaces propres, on a $R = cg$ d'Einstein. Ceci est dit dans le livre de Besse, dans le cas des metriques $G-$ invariantes, lorsque H, G agissent par isometries. Pour le cas particulier du projectif complexe, on savait par les calculs que c'est une variété d'Einstein, et par l'identification isometrique du Gallot-Hulin-Lafontaine, à $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$, c'est une variété ou espace homogène, une propriété supplementaire du projectif complexe d'etre un espace homogene et d'Einstein.)

Le fait que la metrique soit invariante par l'adjoint, fait qu'elle invariante à droite et à gauche. C'est construit pour qu'elle soit bi-invariante. Ce qui induit des propriétés sur la courbure, car on a des isometries à droites et à gauche. C'est construit pour.

a) Les actions a droites et a gauches sont des isometries, soit s la metrique et $L_g : x \to g.x$: $L_g^*(s) = s \Rightarrow L_g^*(R) = R$ voir le livre de Hebey pour l'expression de la courbure quand on a une isometrie Riemannienne. On obtient l'expression ci-dessus.

b) Ici pour le cas particulier du projectif, on a des matrices, l'application $h \to hx$ avec h une matrice et x un vecteur, est lineaire, donc sa derivée est elle meme, d'où le fait que ce qu'on a ecrit ci-dessus, $h' = h$.

l'application : $x(t) \to h.x(t)$, sa derivee est $h.x'(t) = h.x$ avec x un vecteur.

Ce qui fait qu'ici pour le projectif complexe, on a $h'.X.h'^{-1} = hxh^{-1}$ avec le fait que pour la courbure de Ricci, $Ricci(hxh^{-1}, hyh^{-1}) = Ricci(x, y)\, \forall h$, l'invariance de la courbure de Ricci par l'adjoint.

C'est une formule générale qu'on applique au cas particulier du projectif complexe et des matrices. $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.

(On a, soit x un vecteur propre de R pour le valeur propre λ, $R(x) = \lambda x$, on ecrit :

$$R(h.x.h^{-1}, h.y.h^{-1}) = R(x, y) =< y^t|Rx >= \lambda < y^t|x >= \lambda < (h.y.h^{-1})^t|h.x.h^{-1} >=$$

$$=< (h.y.h^{-1})^t|R(h.x.h^{-1}) >, \forall h, \forall y$$

$$\Rightarrow R(h.x.h^{-1}) = \lambda(h.x.h^{-1}).$$

Donc, si on note F_λ le sous-espace propre de R de valeur propre λ, alors $Ad(h)(F_\lambda) \subset F_\lambda$, $\forall h$, il vérifie la propriété d'invariance. d'où la conclusion.)

Donc, le projectif complexe vu du point de vue $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ comme espace homogène et d'Einstein de constante s_0. Pour connaitre le signe de s_0, on utilise le Théorème du livre de Besse qui dit que si $s_0 < 0$, il ne serait pas compact, ce qui n'est pas possible. Si $s_0 = 0$, il serait plat et donc Einstein et Conformement plat, par le résultat du livre de Hebey, il serait de courbure sectionelle constante, ce n'est pas possible. Donc, $s_0 > 0$.

Donc :

1-les revetements Riemanniens dans la construction des metriques de courbures sectionelles constantes, comme les projectifs réels, le Tore, les variétés Hyperboliques.

2-les submersions riemanniennes, dans la construction des projectifs complexes.

3-les fibrations, et groupes de Lie, dans la constructions, des variétés homogènes, puis par exemples, on compare, les metriques, comme pour le projectif complexe, qui est d'Einstein de constante $s_0 > 0$. (La fibration est construite de telle maniere qu'on a une strucutre de variété lisse pour la variété quotient. La fibration sert dans la construction de la métrique, les sections.).

(Par exemple, pour les revetements, il aisé d'avoir une structure de variété lisse sur le quotient. Un peu moins pour les submersions et les fibrations. De plus, dans la construction des metriques du quotient on s'assure que ca ne depend pas du point de la fibre).

4-On a les variétés de courbures sectionnelles constantes, qui sont localement conformement plates. Le produit d'un cercle et d'une variété de courbure sectionelle constante, est plate.

5-Les sommes connexes, de variétés conformement plates, peuvent etre plates.

6-Les sommes connexes, par le theoreme de D. Joyce, peuvent avoir une partie plate et une partie non plate et de courbure scalaire -1.

7-Pour construire une variété nonlocalement conformemtn plate, on construit des produit. On a l'a fait à partir des surfaces réelles de dimension 2. Et en considŕant des produit dont un n'est pas plat.

8-Les surfaces $K3$. La variété de W. Goldman en dimension 3 sur la quelle on peut mettre n'importe qu'elle metrique, elle sera non plate.

8) La formule d'integration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problemes variationels de degré 2, il est possible de resoudre par la formulation variationelle un probleme elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une varieté non orientable.

Par contre quand il sagit de fonction de Green, sur une varieté compacte, il est imperatif de supposer la verieté orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'integration par parties en dehors de petites boules, on se ramene a une varieté à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

9) Pour les variétés de dimension 3. On considere un Torus bundle M_φ d'application φ (voir le Hatcher pour la definition, φ est la monodromy map), il est orientable si et seulement si $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$. William Goldman prouve quil existe un Torus bundle orientable ne possedant pas de structure conformement plate, φ non periodique, (de valeur propres réelles) (par exemple, $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ il n'y a pas de metrique localemeent conformement plate, comme une variete lisse possede toujours une metrique Riemannienne g, elle est dans ce cas non localement conformement plate, $Weyl_g \not\equiv 0$. Ce theoreme dit qu'il n'existe pas de metrique localemment conformement plate sur cette variété.

1-Une structure est conformement plate s'il existe une metrique conforme à la metrique euclidienne. Cette definition est equivalente à celle qui dit qu'une structure conformement plate s'il existe un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Mobius (composeée de translation, rotation et inversion). Cette equivalence est demontrée dans l'article de Kuiper (1949).

2-Cela veut dire que si on veut savoir si une variété a une structure conformement plate, il suffit d'etudier les tranformations conformes, donc le groupe conforme. C'est l'idée de William Goldman, il caracterise le groupe fondamental et le groupe de transfomrmations conforme des varietes conformment plate (il y a une relation entre le groupe fondamental ete le groupe des transformations conformes). Si cette condition n'est pas satisfaite alors, la variete n'a pas de structure conformment plate. (le groupe fondamentale doit etre polycyclique...).

10) Voir aussi, dans le livre d'aubin ou la caracterisation de Kuiper de la structure conforme par une isometrie, sert à prouver le Theoreme de la masse positive dans le cas conformement plat. En effet :

a) Quand on a une variété complete, conformément plate et simplement connexe, elle est conformement isometrique à une partie de la sphere dont on connait la masse $m_0 = 0$, par la formule donnée dans le livre d'Aubin, $\alpha_0(P) = k \times \alpha_{\mathbb{R}^n}(P) = k \times 0 = 0$.

b) On considere une variété M compacte, conformemnt plate. Alors le revetement universel $\tilde{M}$, verfie les conditions du point a) precedent. Donc la masse est nulle.

c) Si de plus M n'est pas conformément diffeomorphe à la sphere, le revetement universel contient plus de deux feuillets.(Par Kuiper une variété compacte connexe, conformément plate plate et simplement connexe, est diffeomorphe à la sphere. Donc, ici, elle ne peut pas etre simplement connexe). Ce qui fait que l'ensemble noté $W = \Pi^{-1}(\Pi(P))$ dans le livre d'Aubin n'est pas reduit à $\{P\}$. Par la construction de la fonction de Green minimale (notée $\tilde{G}_P$ de $\tilde{M}$) et le principe du maximum, il existe une fonction $\tilde{H}$, qu'on peut prendre ici pour $G_P o \Pi$,($\tilde{g} = \Pi^*(g)$ qui est conforme a $\bar{g} = \Phi^*(g_0)$ donc de la forme $u^{-1} H o \Phi$...), telle que on ait $\tilde{H} > \tilde{G}_{\tilde{P}}$ en P. Or $\tilde{M} = \Pi^*(M)$ et donc la fonction de Green de M, verifie au moins l'inégalité. $\alpha_P(G_P o \Pi) > \tilde{\alpha}_{\tilde{P}} = 0$, car pour le revetement universel, d'apres le point a), la masse est nulle (et la distance se conserve localement, car on a un revetement donc une isometrie locale). Ainsi la masse de M en P, $\alpha_P(G_P) > 0$, dans le cas oú M n'est pas conformément diffeomorphe à la sphere.

Remarques : Sur la partie de la preuve du livre de Aubin (communication de M.Vaugon) concernant l'effet du changement conforme sur la masse α. On $\tilde{g} = \varphi^{4/(n-2)} g$ avec $\tilde{g}$ et g des metriques conformément plates $\tilde{d}$ et d. on se ramene au cas où le facteur conforme est constant. La variété est localement conformément plate. Donc la masse m ne depend pas des coordonnées (Bartnik). Comme :

$$\tilde{\alpha}(P) = m(\tilde{G}_P^{4/(n-2)} \tilde{g}) =$$

$$= m(G_P \frac{g}{\varphi(P)^{4/(n-2)}}) = m({G_{P,\lambda}}^{4/(n-2)} g^\lambda) = \alpha(P)/(\varphi(P)^2).$$

Car le raisonnement dans le livre d'Aubin reste vrai so considere une metrique conforme du type $g^\lambda = \lambda^{4/(n-2)} g$ avec λ un constante > 0. Ici, $\lambda = \varphi(P)$ et $G_{P,\lambda} = G_P/\lambda^2$.

Pour le Theoreme de la masse positive de Schoen-Yau en dimension 3, ils prouvent qu'il exsite une surface minimale complete ayant une propriété (integrale de la courbure de Gauss positive) alors que par les calculs cette inetgrale est negative ou nulle. Pour cela ils utilisent le theoreme d'exsitence de surfaces minimales et leur proprietes (Formule de Gauss-Bonnet et Travail de Huber, inegalites isoperimetriques classiques et de Huber, la metrique est voisine de la metrique euclidienne ce qui fait qu'on peut approcher ces deux notions (inegalites isoperimetrique classique)). En particulier, ils prouvent qu'elle est complete dans la premiere etape.(les fermés bornés sont compacts.

La positivité de la courbure scalaire implique que la surface minimale construite a son integrales de Gauss Positive. Et puisque la metrique est "presque" eucllidienne, il y a conservation de l'inegalité isoperimetrique et par la formule de Gauss-Bonnet, elle serait negative ou nulle. Ce qui n'st pas possible.

Il s'agit de construire une metrique conforme avec une proprieté de la courbure scalaire.

Il s'agit de construire une surface minimale ayant une propriété qui decoule de la courbure scalaire.

Cette surface minimale complete n'exsite pas , car cette propriété n'est pas vraie, par le fait que la metrique est "presque" plate et que l'inegalité isoperimetrique euclidienne se conserve et la fromule de Gauss-Bonnet.

Remarques :

a) Ils prouvent que la masse $m \geq 0$, par l'absurde :

1-La masse < 0 intervient dans la construction de la surface minimale complete. (raisonnement par l'absurde). (Ils prouvent qu'elle complete dans cette etape, car, en dehors des bouts, elle est dans un compact, et dans les bouts elle est entre deux plans et la metrique est equivalente à la metrique euclidienne.(les fermés bornés sont compacts)).

2-Une surface est dite de type fini, si $\int |K| < +\infty$: c'est le cas ds la demonstration de la masse positive de Schoen Yau.

3-Quand on a une surface de type fini, si $\chi(S') > 0$ (la caracteristique d'Euler-Poicaré > 0, ce qui est le cas ici par Cohn-Vossen), alors S' est diffeomeorphe au plan. C'est ecrit dans Hulin-Troyanov(1992), premier theoreme, qui dit que, S' est diffeomorphe à une variété compacte S sans bord, sans un nombre fini de points. De plus il y a une formule de Gauss Bonnet, on a alors S' est la sphere moins un au plus un point d'apres cette formule de Gauss-Bonnet. Donc, c'est le plan. Il s'agit d'un diffeomorphisme entre S' et le plan.

On a d'abord une isometrie i, puis une application conforme, F_1. la courbure de Gauss "se conserve". D'abord $K_{i(S')} = Koi$, puis par l'application conforme on a un facteur $|F_1'|^2$, qui s'elimine dans le changement de variable. $\int K = \int K_{F_1 oi} = \int KoF_1 oi|F_1'|^2$, cette derniere inetgrale est la courbure de Gauss de $F_1 oi(S')$. Puis on applique le result d'Huber. (On considere $i(S')$ au lieu de S', car on a une isometrie et la courbure de Gauss "se conserve", $\int_{S'} K = \int_{i(S')} Koi$ et $(F_1^{-1})^*(g_{i(S')}) = |F_1^{-1}|^2 g_{\mathbb{C}}$, car F_1 est conforme, la metrique se transporte suivant un facteur de la metrique de $\mathbb{C}$, on a des coordonnees isothermes globales, on peut appliquer ce que fait Huber (1957)).

(Pour obtenir l'application conforme, on raisonne par rapport au revetement universel et la caracteristique d'Euler-Poincaré).

4-Dans un article de Huber, il prouve que sur une surface ouverte, la formule de "Gauss-Bonnet", pour une suite de domaines :

$$\int K = 2\pi - \lim_{\sigma \to +\infty} L_\sigma^2 / 2A_\sigma.$$

5-La consturction de la surface est en fait une construction d'un courant (surface avec singularité, par une minimisation d'une fonctionelle relativement á une metrique), puis, voir le livre de Federer, la surface est reguliere en dehors du bord. $\partial(N \cap S) = (\partial N \cap S) \cup (\partial S \cap N)$, par la formule de Stokes, S est loin du bord, car la courbure moyenne est positive (c'est une hypothese).

(Voir aussi , le livre de Sa Earp-Tubiana, sur le theoreme de Poincaré-Koebe et la calssification par le revetement universel).

Un theoreme d'uniformisation de Poincaré-Koebe, dit que une surface non compacte simplement connexe est conforme au disque unité ou au plan. (voir l'article de Hulin-Troyanov(1992)).

b) Ils prouvent que si la masse est nulle, $m = 0$, alors l'espace est isometrique à $\mathbb{R}^3$. la preuve de ce point est assez claire dans l'article de Schoen-Yau, ils se ramenent au cas de masse < 0 et de courbure scalaire ≥ 0 par des changement de metriques conformes..., ce n'est pas possible, ou bien la courbure sclaire et de Ricci seraient nulles comme on est en dimension 3 $Weyl \equiv 0$, donc c'est la cas plat. Puis il faut utiliser l'argument sur le volume de Bishop : $Ricci \geq 0$ (ici, $Ricci \equiv 0$), la fonction $f : r \to Vol_g(B_g(r))/Vol_\delta(B_\delta(r))$ est decroissante sur la variété complete de depart M, et tend vers 1 quand $r \to 0$ et $r \to +\infty$ (par l'hypothese que la variété est assymptotiquement plate, la metrique tend vers la metrique euclidienne quand $r \to +\infty$), f est constante egale à 1 et le theoreme de comparaison de Bishop dit dans ce que que M est isometrique a $(\mathbb{R}^3, \delta)$.

Ceci s'applique a une variété compacte sans bord :

En effet, soit M cette variété compacte sans bord. $P \in M$, en se palcant au voisinage de P et si considere les coordonnees geodesiques polaires alors la metrique est du type $g_{ij} = \delta_{ij} + (termes)r^2 + \ldots$, si on fait le changement de variable $r = 1/\rho$, alors :

1-on exclut le point P et la variété devient asymptoique, car pour $r = 0$ (en P), ce n'est pas bien definit.

2-$M - \{P\}$ ressemble a $\mathbb{R}^n$.

3-on sait que les boules geodesiques sont de courbure moyenne < 0 concave, voir la preuve dans un des livres sur la conjecture de Poincaré (Chow and al, par exemple). Mais le changement de variable $r = 1/\rho$ inverse le signe. Ces boules $B_P(r) - \{P\}$ sont les bouts du cas general de la masse positive les N_k qui sont convexes. Cette hypothese de courbure moyenne positives de la variété $N = B_P(r_0) - \{P\}$ est verifiee dans le cas compact sans bord en se placant en un point P et changeant de variable.

4-C'est ecrit dans le livre d'Aubin, que la masse $m = cte \times A = 4(n-1)A$ avec A la partie reguliere de la fonction de Green. Donc elle est positive si $m > 0$.

5-Reste a voir ce qu'est la métrique g comme c dit dans le livre de Aubin, ils considerent $G_P^{4/(n-2)} \times g \equiv r^{-4} g$ avec G_P la fonction de Green, et le changement de variable $\rho = 1/r$ ou $r = 1/\rho$ on a le comportement asymptotique, une variété asymptotique d'ordre 2 en coordonnées geodesiques polaires.

(Dans le changement de variable $\rho = 1/r$, on ecrit, $\partial_\rho = -\frac{1}{r^2}\partial_r$, puisque c'est un changement de variable, on calcule alors $g_{\rho\rho}$, de meme que pour $g_{\rho\theta}$ et finalement $g_{\theta\theta}$ qui se conserve, puiqu'il n'y a pas changement angulaire).

Donc, on voit que le cas compact sans bord se deduit du cas general. (Au voisinage du point P on est dans les bouts, mais ces vosinages sont des boules geodesiques dont on connait la courbure moyenne < 0, et avec le changement de variables, pour avoir des coordonnes asymptotiques, ces boules deviennent de la variété N avec le bon signe sur la courbure moyenne > 0.

On a : $N = B_P(r_0) - \{P\}$, $N_k = B_P(r) - \{P\} = B_P(1/\rho) - \{P\}$ et $\partial N_k = S_P(r) = S_P(1/\rho)$ avec orientation inversée.

Remarque : Sur la courbure moyenne de la sphere de rayon r, $S_P(r)$. On ecrit B est la seconde forme fondamentale :

$$H = trace(B)$$

Mais,

$$B(e_i, e_j) = < \nabla_{e_i}(e_j) | N >,$$

avec e_i, e_j les elements de la base de l'espace tangent a la sphere et N la normale a la sphere.

On prend alors $e_i, e_j \in \{\partial_\theta\}$ et on utilise la derivée covariante et le produit scalaire $< e_i, N >= 0$, en permutant la derivée covariante, jusqu'a obtenir :

$$trace(B) = trace[\nabla_N(< \partial_\theta | \partial_\theta >)] = \nabla_r(< \partial_\theta | \partial_\theta >) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \times r \times g^{\theta_i\theta_j} g_{\theta_i\theta_j} + ... = \frac{n-1}{r} + ...$$

Donc (avec l'orientation positive),

$$H = \frac{n-1}{r} + ...$$

(Aussi, en permuttant la derivation covariante dans $< e_i | N >= 0$, on retrouve l'expression de la courbure moyenne (positive) ecrite dans l'article de Schoen-Yau, $div(N) > 0$).

11) Conernant les sommes connexes, $M \sharp N$ de deux variétés M, N, elles sont definies a partir d'une relation d'equivalence qui donne une varifé quotient Topologique, c'est à dire C^0, à l'ordre 0 il n'y a pas de probleme, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais des qu'on cherche une structure differentiable ou $C^k, k \geq 1$, c'es plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de maniere lisse.

Remarquons que endehors de la sphere ou se fait le recollement, la variété est egale à M ou N.

Lorsque on met une metrique sur M et N alors par des functions cutoff on peut mettre une metrique, par recollement, sur $M \sharp N$ et elle coincide avec celles de M et N en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$ et $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$, on a deux injections naturelles i_1, i_2 et on doit faire le recollement entre $Id_{B(p,2\epsilon)}$ et $i_2 o i_1^{-1}$. On definit une relation dequivalence en partant de couronnes $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$, $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$ vers les varietes M et N. On choisit une carte pour N renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient i_2.

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes, $i_2 o i_1^{-1}$ est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de M a celui de N de maniere lisse. (Les changements de cartes sont lisses de M, N et $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$, par $i_2 o i_1^{-1}$.)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de M et N, alors $M\sharp N$ est orientable.

On a : $X = M \setminus B(p,\epsilon) \cup N \setminus B'(q,\epsilon)$ est compact, le graphe de la relation $Gr = \{(x,x), x\} \cup \{(x, i_2 o i_1^{-1}(x)), x\}$ est fermé, donc, $X \setminus \sim$ est séparé. Soit $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p,\epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q,\epsilon)$, et π l'application de passage au quotient. Alors $\pi(O)$ est un ouvert de $X \setminus \sim$ car $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$.

Soit : Φ l'application de recollement de cartes, definit precedemment sur $\pi(O)$, alors Φ est bien definit et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, par le theoreme d 'invariance du domaine de Brower (car i_2 et i_1 se recollent au bord qui est une sphere, par definition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changement de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x),\ x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p,\epsilon),\ \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2},\ x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q,\epsilon),$$

avec , $[x] = \pi(x)$, l'application de passage au quotient. i_2 inverse l'orientation de N. Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de determinant positifs, de plus, sur la sphere, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a i_1 avec la bonne orientation et sur le deuxieme bout on a i_2 qui inverse l'orientation, et sur la sphere $|i_2| = 1$).

On voit que $\Phi o \pi$ est continue par definition et donc Φ est continue.

On a bien, $(\Phi, \pi(O))$ une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme M et N sont orientables, $M\sharp N$ est orientable.

Avec $(\Phi, \pi(O))$ on a une carte de recollement, et,

$$\Phi o [i_1]^{-1} = \Phi o [i_1^{-1}] = Id_{B(p,2\epsilon)\setminus \bar{B}(p,\epsilon)},$$

$$\Phi o [i_2/|i_2|^2]^{-1} = \Phi o [(i_2/|i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q,2\epsilon)\setminus \bar{B}'(q,\epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considerant les metriques g_M, g_N et $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$, par des fonctions cutoff, on a par recollement, une metrique sur $M\sharp N$:

$$g_{M\sharp N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considere un observateur a de M tel que le repere (a, T) est direct avec T une orientation du bord. on deplace par une rotation, ou selon un chemin circulaire, vers un observateur b de N alors le repere (b, T') est direct si et seulement si $T' = -T$.

D'autre part, on voit que dans la carte de recollement, on a composé avec une inversion. Si M et N ont des structures locallement conformément plates, par Kuiper, il existe pour chaque variété un atlas dont les changment de cartes sont des applications de Mobius. En utlisant la carte de recollement, on obtient un atlas sur $M\sharp N$ formé d'applications de Mobius. Donc, sur la somme sonnexe on a une structure lcoallement conformément plate. (ceci est dit dans la papier de Kulkarni).

12) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grace aux fonctions de Morse. Par recurrence sur le nombre de point critiques.

1- On verifie que sous certaines hypotheses d'orientabilité des bords et quand on a deux homeomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homeomorphismes entre les recollés.

2- On utilise une recurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note g_1, g_2 les applications de recollement, dans le Gramain, $g_1 = f$, $g_2 = f'$. Ici, dans le cas des recollements, on prend, $g_1 = id$ et $g_2 = id$, les recollés sont les ensembles de depart (en fait ils sont difféomorphes aux ensembles de depart et $f_* = id$, $f'_* = id$, on a inversion des orientations quand on recolle, et, $h_* = id, h'_* = id$, h et h' conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles A et A', sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse C^∞, donc ce sont des variétés compactes C^∞, il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se placant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.

Pour l'orientabilité des bords, A et A' sont (homéomorphes implique difféomorphes en dimension 1) difféomorphes á des cerles et, á droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le difféomrphisme conserve l'inversion d'orientation, son Jacobien est positif. D'où, l'application k_0 conserve l'orrientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un diffoemorphisme global h et h', par contre il y a une definition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orienation pour k_0).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant $p \leq q-1$ point critiques avec un maximum et un minimum et $p-2$ points critiques d'indice 1 est homeomorphe à $\mathbb{T}_p$. On peut commencer la recurrence pour $p=0$, la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homeomorphes a des demi-disques et par recollement on a une sphere. A l'ordre $p=1$, pour le Tore, c'est ecrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-memes sont obtenues par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore . Ou bien si on commence la recurrence a partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homeomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-memes obtenus par recollement d'ensembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas (2) vers le haut (1)) avec l'application de recollement $g_1 = id, g_2 = id$, et on obtient le Tore, g_2 est la deuxieme application de recollement). Dans le cas general, on sait qu'il existe une fonction de Morse u, on decompose en deux, la partie de u ayant $p-1$ points critiques, on lui recolle un disque et par recurrence, elle homeomorphe à $\mathbb{T}_{q-1}$ et le reste possede 4 point critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par recurrence, homeomorphe au Tore , $\mathbb{T}_1$. Donc, comme c'est ecrit dans le Gramain, en revenant à u, il y a une partie homeomoprhe à V_{p-1} et l'autre à V_1 et sur V_1 on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc , on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite, $Y - g_1(A)$ et $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$, B un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considerant la composée des deux homeomrphismes (c'est l'homeomorphisme $k_0 = h' o g_1 o g_2^{-1} o h^{-1}$ du Gramain). Il reste a voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a homeomorphismes entre les recollements, $S = (S-A)\sharp(S'-B) = (X-A)\sharp(Y-g_1(A)) = (X-A)\cup(Y-A)$, $g_1 = id$, et $V_{p-1}\sharp V_1$, ce qui est fait dans le cas orientable (A homemorphe au cercle dans le Gramain).

On ecrit $(X-A)\cup(Y-A)$ pour dire qu'on recolle X et Y via A. Les applications du Gramain, $f = g_1 = id, f' = g_2 = id$ et le recollé (pour la relation d'equivalence, $x \equiv f(x) = x, x \in A$, $f_* = -id, f'_* = -id$, est diffeomorphes a l'ensemble de depart. On a $f_* = -id$ et $f'_* = -id$ car on inverse les orientations de depart quand on recolle $(+, h, A \to A'$, conservation de l'orientation, $f', A' \to f'(A'), -$ inversion de l'orientation, $h'^{-1}, f'(A') \to f(A), +$, conservation de l'orientation, $f^{-1}, f(A) \to A, -$, inversion de l'orienation). Donc, on a, $h_* = id$, $f'_* = -id$, $(h'^{-1})_* = id$ et $(f^{-1})_* = -id$. Et on ecrit car $f = id$, $f' = id$, $f_* = id$, $f'_* = id$, pour dire qu'on envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation (meme si elle inversée).

On peut raisonner par les generateurs, si e_1 est genrateur de $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$ et e_2 est gnerateur de $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$, alors, comme sur la partie de Y et Y' on inverse les orientations, on a $-e_1$ est genrateur de $H_{1,A,Y}$ et $-e_2$ est genrateur de $H_{1,A',Y'}$, comme $f = id$ alors , $f_*(e_1) = -e_1$. On ecrite, $f_* = id$ dans le sens qu'elle envoie un genrateur d'orientation vers un genrateur d'orientation. et on ecrit $f_* = -id$, pour dire que f_* inverse l'orientation de depart sur A.

On a la meme chose pour A' et f'.

Des le depart on a deux homeomorphismes h et h', supposons pas exemple que $h_* = -id$, $h_*(e_1) = -e_2$, comme pour A' on est dans l'epsace euclidien, il suffit de composer avec une symetrie t pour avoir $t_*(e_2) = -e_2$ donc, hot conserve l'orientation sur le bord. $(hot)_*(e_1) = e_2$ et on fait la meme chose avec h'. Finalement, on a deux homemorphismes hot et $h'ot'$ ou h' (si h' conserve l'inversion de l'orientation) ; qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilisé l'orientation definie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface S est homemorphe à la somme connexe de q Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connxe de Tore est une varieté differentiable et donc, cette orientation homologique est equivalente à l'orienation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci à chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans $\mathbb{R}^3$, utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des variétés sans bord et des varietés a bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et diffenrentiables). L'equivalence entre orientation homologique et differentiable pour une variété lisse est ecrite dans le livre de Bredon (geometry and tpology). Remarquons qu'une variété a bord W est orientable si et seulement si son interieur $\dot{W}$ est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord ∂W et Il y a equivalence aussi entre orientation homologique et differentiable.(il y a un isomorphisme entre $H_n(W, \partial W, Z)$ et $H_n(W, W - x, Z)$).

Concernant la structure diffentiable sur le recollé de $X - A \cup_{f,A} Y - A$, dans Milnor (Somme connexe et structure differentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de $X - A$ et $Y - A$, sont diffeomorphes a des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure differentiable. Or, pour la somme connexe de deux variétés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant à ici, le recollé $X - A \cup_{f,A} Y - A$ est diffeomorphe à $X - A \cup Y - A$, on a deja une strucuture diffenrentiable sur le recollé, via ce difféomorphisme. (la projection $p : x \to [x]$ est un difféomorphisme).

Quant a l'ecriture $\mathbb{T}_{q-1} \sharp \mathbb{T}_1$, c'est la somme connexe, comme on est dans $\mathbb{R}^3$, somme connexe et recollement coincident.

Quand on a une application s qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variete M_1 compacte sans bord de dimension 1, $s_* = id$. Pour le voir, on a si l'orientation est inversée sur M_1 et $M_2 = s(M_1)$, cela veut dire que : -1 est generateur de $H_1(M_1, M_1 - x_0)$ et de $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$. Donc, $s_*(-1) = -1$, c'est a dire que $s_* = id$. Lorsque φ_1 inverse l'orientation alors $(\varphi_1)_* = -id$.

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que $M_1 - x_0$ est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

s_* est un isomorphisme de $H_1(M_1)$ vers $H_1(M_2)$, comme il conserve l'orientation $s_* = id$.

Pour le voir il suffit de raisonner sur les genrateurs $s_*(e_1) = ke_2$ et $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$, donc, $kk' = 1$, comme ces des entiens$k = 1$ ou $k = -1$, comme s conserve l'orientation $k = 1$. On fait la meme chose pour φ_1 et on obtient $k = -1$.

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De $\pi_1(S_1)$ dans $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : \ [\gamma] \to \tilde{[\gamma]}$$

On applique cela aux applications du Gramain, $s = h'^{-1}oh$ (conserve l'orientation) et $\varphi_1 = \varphi$, $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$, ici, $f = id, f' = id$ et $M_1 = M_2 = A$, puis on raisonne en considerant $S_1 \times \{0\}$ au lieu de S_1.

$$k = \varphi^{-1} oso\varphi,$$

$$\pi(k)[\gamma] = [\varphi^{-1} oso\varphi o\gamma] =$$

$$\bar{h}^{-1}(\tilde{[\varphi^{-1} oso\varphi o\gamma]}) =$$

$$= \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_* os_* o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) =$$

$$= \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) = [\gamma],$$

Où on a utilisé le fait que $\varphi_* = id$ si on se place sur X (on conserve l'orientation) ou $\varphi_* = -id$ si on se place de coté de Y (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer $[\gamma]$ par un generateur $e_1 = [\gamma_1]$ et raisonner sur les generateurs.

Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas ou $k(a) = a$, k fixe un point. Sinon, (k ne fixe pas a), on compose avec une rotation $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$, or en considerant $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$, $s \in [0, 1]$, on a une homotopie entre r et l'identité id, Donc, $r_* = id$ de $H_1(S_1) \to H_1(S_1)$.

Donc, $k'_* = id$, puis on utlise le meme groupe fondamental en a, $\pi_1(S_1, a)$ et l'application d'Hurwicz, comme precedemment pour prouver que $\pi(k') = id$.

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger k.

L'autre cas, Y rectangle et $g_1(A)$, deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur Y, celle-ci change quand on part de X et on lui recolle Y via A. (ici, $g_1 = f$ est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension ≤ 3.

13) Pour l'inegalité de Kato : on a $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \in L^1_{loc}$ alors : $u \in W^{1,1}_{loc}$, pourquoi ?

Comme c'est local, on ecrit dans une boule u en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et $n \geq 3$ par exemple, $n = 2$ c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial(\frac{1}{r^{n-2}}) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec ∂P regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut deriver sous le signe $\int$ pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \;\; \Rightarrow \;\; \exists \; r \int_{\partial B_r} u(\sigma) d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour $\varphi \in D(B_{r/2})$:

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)(\frac{1}{r^{n-2}}) + \text{ termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int\int (\partial(\frac{1}{r^{n-2}})(-\Delta u)\varphi + \int\int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \;\; a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

Ceci est valable pour u reguliere. Soit ρ_n un molliffier, alors :

Si $u \in L^1(B_r)$, alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour $x \in B_{r/2}$:

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \to u, \;\; \text{dans } L^1_{loc}(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \to \Delta u, \;\; \text{dans } L^1_{loc}(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec u, avec $\rho_n * u$, comme on a des bornes uniformes en L^1_{loc}, alors,

$$\rho_n * u \in W^{1,1}_{loc}, \;\; \text{et } \nabla(\rho_n * u) \to v \in L^1_{loc},$$

Donc,

$$\int u\partial\varphi = \lim_n \int (\rho_n * u)\partial\varphi = -\lim_n \int \partial(\rho_n * u)\varphi \to -\int v\varphi,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

On a la meme chose si on considere un probleme variationel $-\Delta u = f$, $f \in L^1_{loc}$ et $u \in L^1_{loc}$. On a meme mieux, $u \in W^{1,q}_{loc}$. Une partie du travail de Brezis-Merle suppose ces hypotheses, par ce qu'on vient de voir, on utilise le théorème 1 de Brezis-Merle et les estimations elliptiques, pour poser le probleme quand on n'a pas de condition aux bord dans la formulation de Brezis et Merle.

On peut retrouver ce resultat en se ramenant a une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un probleme de Dirichlet.

Soit $f \in L^1$, $\exists\, f_j \to f$ dans L^1 avec $f_j \in C^\infty_c$, on resout :

$$-\Delta u_j = f_j, \text{ avec } u_j = 0, \text{ sur } \partial\Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$||u_j||_{W^{1,q}_0} \leq C_q,$$

En passant à la limite en j, on a l'existence de $u_0 \in W^{1,q}_0$ tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \text{ et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le theoreme de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W^{1,q}_{loc},$$

On retrouve le Theoreme dans le livre de Dautray-Lions.

On fait la meme chose avec le Theoreme 1 de Brezis-Merle, sauf que les relations ne sont pas locales.

On a :

$$-\Delta u = f \in L^1, \; u \in W^{1,1}_0(\Omega).$$

On resout pour $f_j \to f$ dans L^1. $f_j \in C^\infty_c(\Omega)$. (la regularité du bord est au moins C^2 pour pouvoir appliquer le theoreme de dualité de Stampacchia).

$$-\Delta u_j = f_j, \; u_j \in H^1_0(\Omega),$$

On a :

$$||\nabla u_j||_q \leq C_q, \; 1 \leq q < 2.$$

On passe a la limte en j.

On a :

$$-\Delta u_0 = f, \; u_0 \in W^{1,q}_0(\Omega).$$

Finalement :

$$-\Delta(u - u_0) = 0, u - u_0 \in W^{1,1}_0(\Omega).$$

Soit on utilise le principe du maximum dans $W^{1,1}_0$ pour avoir $u = u_0$ $p.p.$

Soit, on utilise le theoreme de regularité d'Agmon pour avoir $u - u_0$ reguliere et appliquer le principe du maximum usuel.

Pour, $u_j, f_j, |f_j|$ on applique le raisonnement de Brezis Merle (theoreme 1, on ne peut utiliser le potentiel Newtonien qu'avec des hypothèses sur f_j ; integrables et bornées, par exemple, voir le livre de Gilbarg-Trudinger). Puis par le lemme de Fatou, l'inegalité de Brezis Merle est valide pour u_j et u_0 donc pour u. ($u = u_0,\ p.p$).

14) Sur la fonction distance au bord : c'est bien ecrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grace a la propriété de la sphere interieure, il existe un voisnage du bord assez petit tel que la fonction distance est C^k et est egale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des spheres le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit etre par exemple au moins C^2.

Par des cartes, on a un segment, on peut faire rouler une sphere. On prend son image par l'application de carte, qui est suffisemment reguliere pour que le domaine d'arrivée contienne des ellipses, donc des cercles.

15) Pour le theoreme de Dualité de Stampacchia :

On part de l'equation :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec la condition de Dirichlet. ($\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$).

On a :

$$u_i \in W^{2,k} \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega}),\ u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On a :

$$\int_{\Omega} |\Delta u_i| dx \leq bC.$$

On considere un vecteur $f = (f_1, f_2) \in L^{q'}(\Omega)$ avec $q' > 2$. On utilise le Theoreme de Lax-Milgram dans les Hilbert, (voir Gilbarg-Trudinger), pour avoir une solution de $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'equation :

$$-\Delta z = div(f),$$

avec la propriété suivante (voir la preuve de l'inégalité de Harnack dans le Gilbarg-Trudinger) :

$$||z||_{L^\infty} \leq C||f||_{q'}.$$

On met u_i comme fonction test dans l'equation de z , on a, en valeur absolue a l'exterieur des integrales :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nabla u_i dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u_i dx = -\int_{\Omega} z \Delta u_i dx \leq C' ||f||_{q'},$$

On prend le supremum dans $L^{q'}$, et on a :

$$||\nabla u_i||_q \leq C_q, \forall\, 1 \leq q < 2.$$

Dans le probleme de Brezis-Merle, on a :

$$||\nabla (u_i - u)||_{L^q(\Omega_\epsilon)} = o(1),$$

c'est la convergence interieure dûe au travail de Brezis et Merle. Aprés, par l'inegalité de Hölder :

$$||\nabla (u_i - u)||_{L^q(\Omega - \Omega_\epsilon)} \leq |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q - 1/r} ||\nabla (u_i - u)||_{L^r} \leq C_r |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q - 1/r} = o(1),\ 1 \leq q < r < 2.$$

On obtient finalement :

$$||\nabla (u_i - u)||_q = o(1).$$

16) Pourquoi dans le livre d'Aubin, il considere les solutions u pour un operateur du type :

$$a_{ij}(M)\partial_{ij} u + b_j(M)\partial_j u + c(M)u = f(M)?$$

Dans le livre d'aubin $a_{ij}(M), b_j(M)$ sont des champs de tenseurs, pourquoi tenseur ?

C'est lié au cartes et au changements par cartes et à la formulation variationelle.

1) Dans le livre d'Hebey, il donne la definition d'un probleme posé de maniere variationnelle :

Pour les variétés :

$$\int_M a_{ij}\partial u \partial \varphi dV_g + b_j u \partial \varphi dV_g + cu\varphi dV_g = \int f\varphi dV_g$$

a) Il faut que le probleme soit posé sur une variété de maniere globale, donc independemment des cartes. C pour cela que dans le livre d'Hebey, il dit pour toute carte h.

b) Si on revient à un probleme posé sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il y a deja une carte disponible, la carte euclidienne, (Ω, id). Donc pour $\mathbb{R}^n$, il suffit que le probleme soit posé en coordonnées cartesiennes.

Et apres, par la formule de changement de variable, on se ramene à toute carte de l'ouvert. Notons que la notation dV_g l'explique bien car par un changement de variable, on retrouve la Jacobien, qui donne l'element de volume pour la metrique euclidienne.

Mainteneant quand on fait le changement de variables, il faut que le probleme soit invariant, c'est à dire que les coefficients ne changent par or ceci est possible si on les suppose comme champs de tenseurs.

on ecrit par exemple :

$$a_{ij}(M) = a_{ij}[x(M)] = a_{kl}[y(M)]\partial_x y_i^k \partial_x y_j^l,$$

dans le changement de variables, cette loi est celle des tenseurs.

C'est pour cela qu'on suppose les coefficients, des champs de tenseurs. Pour que par changement de variables, ils soit invariants et ceci est possible si ils obeissent à la loi des tenseurs.

Et pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il suffit que le probleme soit posé en coordonnés cartesiennes. Alors on la pour toute carte.

Une forme bilineaire est un tenseur. Un champ de formes bilneaires est un champ de tenseurs. Un champ de vecteurs est un champ de tenseurs.

17) Pour quoi, quand on veut appliquer le principe du maximum sur une variété, on a besoin d'un opérateur global :

a) C'est parce qu'on a considéré une variété, qui est cosntituée de cartes. Il ne faut pas que ca depende de la carte.

Par exemple, si on veut appliquer la principe du maximum en P,

On ecrit : $Lu(P) = L(uo\varphi^{-1}(x_1, x_2))$, on voit que dans l'ecriture meme, il ne faut pas que ca depende de la carte et de l'application de carte φ.

b) Par recouvrement, dans l'intersection d'ouvert de carte, on ecrit :

$$Lu(P) = L[uo\varphi^{-1}] = L[uo\psi^{-1}]$$

dans cette ecriture, on a deux cartes, et ile ne faut pas que ca depende des deux cartes, pour cela il faut que l'operateur soit global.

c) On a la meme chose, si on raisonne que la derivée normale et le principe du maximum de Hopf.

18) Sur les applications conformes du bord en dimension 2.

On a parlé d'application conforme en dimsnion 2 :

Pourquoi la definition d'un domaine analytique permet d'avoir une carte conforme locale du bord ?

a)-Sur le disque unité, on a une transformation conforme directe du disque sur le demi-plan de Poincaré. Il n'y pas besoin de definir l'application ψ (voir ci-dessous).

b)-L'application ψ, permet de definir des coordonnées qui permettent d'utiliser une application conforme.

Ce qui suit est la traduction de ce qui a été ecrit dans les preprints sur arXiv. Pour definir un carte "conforme" γ, en dimension 2.

1-Il suffit de prouver que $\gamma_1((-\epsilon, \epsilon)) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) \cap \{|abscisse| < \epsilon\}$, pour $\epsilon > 0$ assez petit. Avec $\tilde{\gamma}_1$ l'extension holomorphe de $\gamma_1(t) = t + i\varphi(t)$.

Pour voir ca, on raisonne par l'absurde. On a pour $z_\epsilon \in B_\epsilon$, $\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon) = (t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))$ avec $|t_\epsilon| \geq \epsilon$. Comme $\tilde{\gamma}_1$ est injective sur une boule fixés au depart par le theoreme d'inversion locale, B_1 et

$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 = t+i\varphi(t)$ sur l'axe réel, on a nécessairement $|t_\epsilon| \geq 1$. Mais par continuité $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| \to 0$ parce que $z_\epsilon \to 0$. Et on utilise le fait que $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| = |(t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))| \geq |t_\epsilon| \geq 1$, pour avoir une contradiction.) (Cela veut dire que pour un rayon assez petit quand le graphe sort de la boule, il n'y retourne plus). (Ce fait implique, en raisonnant avec des chemins, quand un a chemin qui coupe $\partial\Omega$ in $\tilde{\gamma}_1(B_\epsilon)$ en un point ce point a pour abscisse $|abscisse| < \epsilon$. Encore, une fois, ce fait (par un raisonnement par l'absurde avec le fait que $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$, il faut raisonner avec des chemins), implique que l'image de la partie superieure est entierement d'un coté de la courbe et l'image de l'autre est de l'autre coté de la courbe.

2- Posons : $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \to M \in \Omega$ telle que : $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$ avec (i'_1, j'_1) est une base telle que $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$. Et, $\varphi = id : (x_1, x_2) \to M$ telle que : $\overrightarrow{OM} = x_1 i_1 + x_2 i_2$ la base canonique (i_1, j_1). Alors on a deux cartes de Ω, φ et ψ et les affixes $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z_M = x_1 + ix_2$ sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} o \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

On a :

$$\partial_{\lambda_1} = \cos\theta \partial_{x_1} + \sin\theta \partial_{x_2},$$

$$\partial_{\lambda_2} = -\sin\theta \partial_{x_1} + \cos\theta \partial_{x_2},$$

Donc, la métrique dans la carte ψ ou en coordonnées (λ_1, λ_2) est : $g^{\lambda}_{ij} = \delta_{ij}$ et le Laplacien dans les deux cartes (coordonnées), ψ et φ est le Laplacien usuel $\partial_{\lambda_1\lambda_1} + \partial_{\lambda_2\lambda_2}$.

On ecrit :

$$\Delta u(M) = \Delta_\lambda (u o \psi(\lambda_1, \lambda_2))$$

Puis on applique l'application conforme $\tilde{\gamma}_1$ qui envoie l'affixe T_M, M dans un voisinage de of $x_0 \in \partial\Omega$ vers B_ϵ et envoie $T_M, M \in \partial\Omega$ sur l'axe réel $(-\epsilon, \epsilon)$ et l'autre partie vers l'autre partie de Ω et $\bar{\Omega}^c$.

On a : $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \to M$ et $\tilde{\gamma}_1 : (\lambda_1, \lambda_2) \to (\mu_1, \mu_2)$. L'application considérée est : $\psi o \tilde{\gamma}_1^{-1}$. C'est bien une carte. Pour le voir :

La premiere carte (carte usuelle) est : $\psi o g^{-1}$ avec g est l'application $g : (\lambda_1, \lambda_2) \to [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$ et φ_0 l'application qui permet de definir $\partial\Omega$ comme un graphe.

L'application de changement de carte est :

$$g o \tilde{\gamma}_1^{-1}$$

elle est reguliere d'un voisinage de 0 vers un autre voisinage de 0 et envoie la partie superieure du premier voisinage vers la partie superieure de l'autre voisinage (ainsi que les parties inferieures).

On voit bien que $\psi o \tilde{\gamma}_1^{-1}$ est une carte avec la propriété que $\tilde{\gamma}_1$ est conforme.

(l'application $\psi o \tilde{\gamma}_1^{-1}$ est aussi la composée de, une rotation et une translation (donc conforme) et de $\tilde{\gamma}_1^{-1}$ qui est conforme, si on se placait en coordonnées cartésiennes au départ. Mais, il faut voir que la carte ψ definit des coordonnés qui permettent la construction d'une application conforme. On n'a pas besoin de cela pour le disque unité, on a directement l'application du demi-plan de Poincaré).

Remarque : ψ et $\varphi = id$ sont des cartes de Ω et ψ est "presque" une carte de $\partial\Omega$. Mais $\psi o \tilde{\gamma}_1^{-1}$ et $\psi o g^{-1}$ sont des cartes du bord.

Le probleme elliptique peut etre vu de deux manieres : donc, si on considere, au depart, les coordonnées cartesiennes, on a une transformation conforme. Si, on considere le probleme posé sur une variété a bord, on a une carte analytique.

3- "Caractersation des domaines C^k" : On peut dire que la definition d'un domaine $C^k, k \geq 1$ est equivalente à la definition d'une sous-variété + la condition : $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$ or $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega$.

19) Concernant l'element de volume et la mesure de Hausdorff sur le bord :

Avec le point 18), la carte usuelle du bord est : $h = \psi o g^{-1}$ avec,

$\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \to M \in \Omega$ telle que : $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$ avec (i'_1, j'_1) est une base telle que $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$. Et, $\varphi = id : (x_1, x_2) \to M$ telle que : $\overrightarrow{OM} = x_1 i_1 + x_2 i_2$ la base canonique (i_1, j_1). Alors on a deux cartes de Ω, φ et ψ et les affixes $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z_M = x_1 + ix_2$ sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} o \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

et,

g est l'application $g : (\lambda_1, \lambda_2) \to [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$ et φ_0 l'application qui permet de definir $\partial\Omega$ comme un graphe.

La metrique sur le bord $\partial\Omega$ s'ecrit localement :

$$h^*(i^*(\delta)) = \sqrt{1 + [\varphi_0'(\lambda)]^2} d\lambda,$$

avec δ la metrique euclidienne de $\mathbb{R}^2$.(la metrique sur le bord est $i^*(\delta)$ avec $i : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$, $x \to x$).

On l'a explicitement, en calculant (le determinant contient un terme car on est en dimension 1, c la meme chose en dimension superieure), $h^*(i^*(\delta)) = \delta(dh(\partial_\lambda), dh(\partial_\lambda)) = [1 + [\varphi_0'(\lambda)]^2]$.

Avec $i : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$, $x \to x$ l'inclusion.

Et considerant l'application Lipschitzienne (c'est aussi l'application de carte, locale, du bord $\partial\Omega$ qui permet aussi de calculer g_{11}, ce qu'on a fait precedemment) :

$$\lambda \to (\lambda, \varphi_0(\lambda)) = h(\lambda, 0),$$

on a par la formule de l'aire, l'egalité entre la mesure de Hausdorff et le Jacobien (element d'aire) :

$$\int_{[a,b]} \sqrt{1 + [\varphi_0'(\lambda)]^2} d\lambda = \int_{h([a,b],0) \subset \partial\Omega} dH_1,$$

Finalement, on a l'egalité suivante :

$$d\sigma = \sqrt{1 + [\varphi_0'(\lambda)]^2} d\lambda = dH_{1|\partial\Omega}.$$

avec cette remarque, on voit par exemple que $H_1(\partial\Omega) < +\infty$, dans le cas $\partial\Omega$ compact.

20) Quand y a il une relation entre $W^{1,\infty}$ et $C^{0,1}(\bar{\Omega}) = Lipschitz(\bar{\Omega})$.

a) Dans le cas d'un convexe ou une boule, c'est ecrit dans le livre de Brezis quand il approxime L^∞ par L^p, dans le critere pour qu'une fonction soit $W^{1,p}$.

b) Quand l'ouvert est Lipschitzien ou au moins C^1, c'est un exercice dans livre d'Otared Kavian. On utlise l'operateur de prolongement (Notez que la constante de prolongement ne depend pas de p, on peut utliser le proceder de Brezis $p \to +\infty$), puis on se ramene á un convexe, une boule, puis on revient aux fonctions de depart.

Dans les cas precedents, il y a egalité entre les deux ensembles.

21) pourquoi on ecrit dan la derivation (ici $\nabla = \nabla_X$ pour un vecteur X) :

$$\nabla(< a|b >) =< \nabla a|b > + < a|\nabla b >$$

ceci est du à (g est la metrique et C la contraction) :

$$< a|b >= C_1^3 C_2^4 (g \otimes a \otimes b)$$

La derivée covariantes commute avec la contarction et $\nabla g = 0$, car c la connexion de Levi-Civita :

$$\nabla(< a|b >) = C_1^3 C_2^4 (\nabla g \otimes a \otimes b + g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b)$$

Donc,

$$\nabla(< a|b >) = C_1^3 C_2^4 (g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b) =< \nabla a|b > + < a|\nabla b > .$$

22) Sur les coordonnées geodesiques polaires : elles sont definies a partir de la carte exponentielle. Il existe un voisinage du point tel que pour $y \in B(x,\epsilon)$, $z \to exp_y(z)$ est un diffeomeorphisme. On a alors une carte. On definit les coordonnees geodesiques polaires. On s'assure que (lemme de Gauss) :

a)

$$\frac{d}{dt}(< \nabla_t | \nabla_t >) = \nabla_t(< \nabla_t | \nabla_t >) = 2 < \nabla_t(\nabla_t) | \nabla_t >= 0$$

Car c'est une geodesique $\nabla_t(\nabla_t) = 0$. Donc, $< \nabla_t | \nabla_t > \equiv cte = \lim_{t \to 0} < \nabla_t | \nabla_t >= 1$, car la carte exponentielle est normale en y.

$$\nabla_t(< \nabla_t | \nabla_\theta >) = \frac{1}{2} \nabla_\theta(< \nabla_t | \nabla_t >) = \frac{1}{2} \nabla_\theta(1) = 0,$$

Ici, on utilise le fait que la connexion est sans torsion pour permuter la derivation en t et angulaire.

Donc,

$$< \nabla_t | \nabla_\theta > \equiv cte = \lim_{t \to 0}(< \nabla_t | \nabla_\theta >) = 0$$

C'est le lemme de Gauss.

On pouvait ecrire $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)$ avec $\partial_i, \partial_j \in \{\partial_t, \partial_{\theta_j}\}$.

b) Les geodesiques sont minimisantes, c bien ecrit dans le livre d'Hebey et Gallot-Hulin-Lafontaine, remarquons, comme c ecrit dans le Do Carmo. Pour calculer la longueur d'un chmin passant par l'origine, on prend $\int_\epsilon^1$, puis on fait tendre ϵ vers 0. Car les coordonnees geodesiques polaires sont definit en dehors de 0, origine, puis on fait tendre le rayon r vers 0.

c) On voit comme c dit dans le Hebey, que les geodesiques sont minimisantes, l'image de boules ouvertes sont des boules ouvertes, de boules fermees, sont des boules fermees, l'image de spheres, sont des spheres.

Soit, $\tilde{z}$ l'application de $\mathbb{S}_{n-1}$ vers $\mathbb{S}_{n-1}^r$ définie par $\theta \to r\theta$.

Par définition, pour h une fonction définie au voisinage de x :

$$\partial_{j,\varphi_0}(h) = \frac{\partial(ho\varphi_0)}{\partial\bar{\theta}_j} = \frac{\partial(ho\exp_x ozo\psi^{-1})}{\partial\bar{\theta}_j} = \frac{\partial(ho\exp_x)}{\partial z_k} \times r\frac{\partial(\psi^{-1})^k}{\partial\bar{\theta}_j}.$$

avec $\varphi_0 = \exp_x ozo\psi^{-1}$.

Ce qu'on peut ecrire :

$$\partial_{j,\varphi_0}(h) = \frac{\partial(ho\exp_x)}{\partial z_k} \times r\frac{\partial\theta^k}{\partial\bar{\theta}_j}.$$

et,

$$\partial_{\theta^i,x} = rb_i^k(\theta)\partial_{z^k,x}.$$

On a donc, pour tout $x \in B(x_0,\epsilon_0)$, $[B(x,\epsilon_0), \exp_x^{-1}]$ est une carte normale en x. Pour tout $x \in B(x_0,\epsilon_0)$:

$$g_{x,ij}(z) = g(z)(\partial_{z^i,x}, \partial_{z^j,x}),$$

où $\partial_{z^i,x}$ est le champ de vecteur locale canonique lié à la carte exponentielle.

On note, $a_i^k(z,x) = \dfrac{(\varphi o \exp_x)^k}{\partial z^i}[\exp_x^{-1}(z)]$, alors, $\partial_{z^i,x} = a_i^k(z,x)\partial_{u^k,\varphi}$,

avec, $\partial_{u^k,\varphi}$, le champ de vecteur canonique relatif à la carte (Ω,φ), ce dernier ne dépend pas du point x, contrairement à celui de la carte exponentielle en x. Quant aux fonctions a_i^k elles sont C^∞ de z et x. On obtient,

$$g_{x,ij}(z) = g(z)[a_i^k(z,x)\partial_{u^k,\varphi}; a_j^l(z,x)\partial_{u^l,\varphi}] = a_i^k(z,x)a_j^l(z,x)g_{kl}(z),$$

où les g_{kl} sont les composantes de g dans la carte (Ω,φ).

On a, $z = \exp_x(y)$, $y \in B(0,\epsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$ et $y = r\theta$ en coordonnées polaires, ainsi, la fonction $(x,r,\theta) \to g_{x,ij}[\exp_x(r\theta)]$ est C^∞ des variables x, r et θ.

D'autre part, par définition, $g_{ij}^k(r\theta) = g_{[\exp_x(r\theta)]}(\partial_{\theta^i,x}, \partial_{\theta^j,x})$, (champs de vecteurs canoniques).

En utilisant le même type de calcul que précédemment, on a,

$$\partial_{\theta^i,x} = rb_i^k(\theta)\partial_{z^k,x},$$

avec, b_i^j des fonction trés régulières. Donc,

$$g_{ij}^k(r,\theta) = r^2 g[\exp_x(r\theta)](b_i^k\partial_{z^k,x}, b_j^l\partial_{z^l,x}),$$

d'où,

$$g_{ij}^k(r,\theta) = r^2 b_i^k(\theta)b_j^l(\theta)g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)].$$

Donc, l'application, $\tilde{g}_{ij}^k : (x,r,\theta) \to b_j^k b_j^l g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)]$ est C^∞ des trois variables x, r et θ. On a,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta) = b_i^k(\theta)b_j^k(\theta)c^m(\theta)\partial_m g_{x,kl}(x) = 0,$$

car, la carte exponentielle est normale en x et les $g_{x,kl}$ sont les composantes de g dans cette même carte. On a aussi,

$$\partial_{\theta^m}\tilde{g}_{ij}^k(x,r,\theta) = \tilde{b}_i^k(\theta)\tilde{b}_j^l(\theta)g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + r\bar{b}_i^k(\theta)\bar{b}_j^l(\theta)\bar{c}_m^s(\theta)\partial_s g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)],$$

En redérivant en r, on obtient,

$$\partial_r\partial_{\theta^m}\tilde{g}_{ij}^k(x,r,\theta) = u_{ijmr}^{klq}(\theta)\partial_q g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + v_{ijmr}^{kl}(\theta)w^s(t)\partial_s g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)]+$$

$$+rh_{ijrm}^{klst}(\theta)\partial_{st}g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)].$$

Donc,

$$\partial_r\partial_{\theta^m}\tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta) = 0, \ \forall ,x \in B(x_0,\epsilon_0), \ \forall \ \theta \in U^k.$$

Ainsi, on obtient :

$$\partial_r\tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta) = \partial_r\partial_{\theta^m}\tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta) = 0, \ \forall \ x \in B(x_0,\epsilon_0), \ \forall \ \theta \in U^k. \qquad (*)$$

On a la meme chose en considerant le determinant :
Comme, $\sqrt{|\tilde{g}^k|} = \alpha^k(\theta)\sqrt{[det(g_{x,ij})]}$, on en déduit,

$$\partial_r(\log\sqrt{|\tilde{g}^k|}) = \partial_r[\log(\sqrt{[det(g_{x,ij})]})].$$

Par définition du déterminant et en développant par rapport al ligne 1 par exemple, on obtient,

$$det[g_{x,ij}][\exp_x(r\theta)] = \Sigma \ \Pi \ g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)],$$

d'où,

$$\partial_r det[g_{x,ij}](x) = \Sigma \ \Pi \ [g_{x,kl}(x)]a^s(\theta)\partial_s g_{x,mn}(x) = 0,$$

Car, la carte exponentielle est normale en x.

Finalement,

$$\partial_r|\tilde{g}^k|(x,0,\theta) = 0, \ \forall \ x \in B(x_0,\epsilon_0), \ \forall \ \theta \in U^k.$$

En utilisant le même raisonnement que celui qu'on utilisé pour calculer, $\partial_r\partial_{\theta^m}\tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta)$, on prouve que,

$$\partial_r\partial_{\theta^m}|\tilde{g}^k|(x,0,\theta) = 0.$$

En conclusion,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x,0,\theta) = 0 \ \forall \ x \in B(x_0,\epsilon_0), \ \forall \ \theta \in U^k. \qquad (**)$$

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x,0,\theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x,0,\theta) = 0 \ \forall \ x \in B(x_0,\epsilon_0), \ \forall \ \theta \in U^k. \qquad (***)$$

$$\partial_r \partial_{\theta_m} \left[\frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right](x,0,\theta) = \partial_r \partial_{\theta_m} \partial_{\theta m'} \left[\frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right](x,0,\theta) = 0 \ \forall \ x \in B(x_0,\epsilon_0), \ \forall \ \theta \in U^k. \ (****)$$

L'ouvert U^k est choisit de telle manière qu'en le réduisant un peu, il reste un ouvert de carte.

On utilise alors, l'uniforme continuité des dérivées succéssives pour obtenir les résultats de la proposition 1.

Remarque :

$\partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}]$ qui est une fonction locale de θ, est la restriction d'une fonction globale, définie sur toute la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ à savoir $\partial_r [\log \sqrt{det(g_{x,ij})}]$. On notera, $J(x,r,\theta) = \sqrt{det(g_{x,ij})}$.

23) Le Laplacien en polaires :

Ecrivons le laplacien dans $]0,\epsilon_1[\times U^k$,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + \partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}]\partial_r + \frac{1}{r^2\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i}(\tilde{g}^{\theta^i\theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|}\partial_{\theta^j}).$$

On a,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + \partial_r \log J(x,r,\theta)\partial_r + \frac{1}{r^2\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i}(\tilde{g}^{\theta^i\theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|}\partial_{\theta^j}).$$

Le laplacien s'écrit (décomposition radiale et angulaire),

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + \partial_r [\log J(x,r,\theta)]\partial_r - \Delta_{S_r(x)},$$

où $\Delta_{S_r(x)}$ est le laplacien sur la sphère $S_r(x)$.

$\Delta_{S_r(x)}$, s'écrit localement,

$$-\Delta_{S_r(x)} = \frac{1}{r^2\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i}(\tilde{g}^{\theta^i\theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|}\partial_{\theta^j}).$$

On coclut que l'opérateur de droite en θ, dans la première expression du laplacien, n'est que l'écriture locale d'un opérateur global.

On pose, $L_\theta(x,r)(...) = r^2 \Delta_{S_r(x)}(...)[\exp_x(r\theta)]$.

L'opérateur $L_\theta(x,r)$ est un opérateur définie sur les fonctions $C^2(\mathbb{S}_{n-1})$ de manière globale (il ne dépend pas de la carte choisie sur $\mathbb{S}_{n-1}$ et vaut localement,

$$L_\theta(x,r) = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i}[\tilde{g}^{\theta^i\theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|}\partial_{\theta^j}].$$

De plus cet opérateur est elliptique, on écrit alors,

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + \partial_r [\log J(x,r,\theta)]\partial_r - \frac{1}{r^2} L_\theta(x,r).$$

Si, maintenant, u est une fonction définie sur M, alors, $\bar{u}(r,\theta) = uo\exp_x(r\theta)$ est la fonction qui lui correspond en coordonnés polaires centrées en x.

$$-\Delta u = \partial_{rr}\bar{u} + \frac{n-1}{r}\partial_r \bar{u} + \partial_r [\log J(x,r,\theta)]\partial_r \bar{u} - \Delta_{S_r(x)}(u_{|S_r(x)})[\exp_x(r\theta)],$$

$$r^2\Delta_{S_r(x)}(u_{|S_r(x)})[\exp_x(r\theta)] = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}\partial_{\theta^i}\left[\tilde{g}^{\theta^i\theta^j}\sqrt{|\tilde{g}^k|}\partial_{\theta^j}[uo\exp_x(r\theta)]\right] = L_\theta(x,r)\bar{u}.$$

Ainsi,

$$-\Delta u = \partial_{rr}\bar{u} + \frac{n-1}{r}\partial_r\bar{u} + \partial_r[\log J(x,r,\theta)]\partial_r\bar{u} - \frac{1}{r^2}L_\theta(x,r)\bar{u}.$$

D'autre part, il est clair qu'en se placent dans la carte exponentielle, on transporte la métrique dans l'espace euclidien. Puis, en considérant les coordonnées géodésiques polaires, on voit que la métrique se decompose suivant les champs de vecteurs radial et angulaires. Comme l'espace se decompose suivant la partie radiale et angulaire sur la sphere, il est clair qu'en considérant les champs de vecteur $\partial_r, \partial_{\theta^j}$, on retrouve localement le laplacien radial et angulaire, qui est un laplacien global par la carte exponentielle. On retrouve par l'intermédiaire de la carte exponentielle un laplacien global qu'on decompose en coordonnnees géodésiques polaires en partie radiale et angulaire par le lemme de Gauss.

L'opérateur $L_\theta(x,r)$ est un laplacien sur $\mathbb{S}_{n-1}$ pour une certaine métrique qui dépend du paramètre r.

On a, $\Delta_{S_r(x)} = \Delta_{i^*_{x,r}(g)}$ où, $i_{x,r}$ est l'application identité de $S_r(x)$ dans M et $i^*_{x,r}(g) = \tilde{g}$ est la métrique induite sur la sous-variété $S_r(x)$ de M.

Comme $\exp_x$ induit un difféomorphisme de $S_r(x)$ vers $\mathbb{S}^r_{n-1}$, on a :

$$\Delta_{S_r(x)}u_{|S_r(x)} = \Delta_{i^*_{x,r}(g)}u_{|S_r(x)} = \Delta_{\tilde{g}}u_{|S_r(x)} = \Delta_{\exp^*_x(\tilde{g}),\mathbb{S}^r_{n-1}}uo\exp_x(v),$$

Soit, $\tilde{z}$ l'application de $\mathbb{S}_{n-1}$ vers $\mathbb{S}^r_{n-1}$ définie par $\theta \to r\theta$. Alors,

$$\Delta_{\exp^*_x(\tilde{g})}uo\exp_x(v) = \Delta_{\tilde{z}^*[\exp^*_x(\tilde{g})]}uo\exp_x(r\theta),$$

Pour le choix de la carte (ψ, U^k), sur $\mathbb{S}_{n-1}$, la carte locale en coordonnées polaires pour le point x est, $(\varphi_0,]0,\epsilon_0[\times U^k)$, où $\varphi_0 = \exp_x o\tilde{z}o\psi^{-1}$. Les g^k_{jl} sont par définition :

$$g^k_{jl}(r,\theta) = g_{\exp_x(r\theta)}(\partial_{j,\varphi_0}, \partial_{l,\varphi_0}),$$

avec, $\partial_{j,\varphi_0}, \partial_{l,\varphi_0}$ les champs de vecteurs canoniques correspondant à la carte $(\varphi_0,]0,\epsilon_0[\times U^k)$.

Par définition, pour h une fonction définie au voisinage de x :

$$\partial_{j,\varphi_0}(h) = \frac{\partial(ho\varphi_0)}{\partial\bar{\theta}_j} = \frac{\partial(ho\exp_x o\tilde{z}o\psi^{-1})}{\partial\bar{\theta}_j},$$

Rappelons, qu'on ecrit, $\psi(\theta) = (\bar{\theta}_1,\ldots,\bar{\theta}_{n-1})$ et $\theta_0 = r$ (dérivations angulaires et radiale).

Si, on s'occupe des composantes angulaires, c'est à dire les champs de vecteurs, ∂_{j,φ_0} avec $1 \leq j \leq n-1$, $j \in \mathbb{N}$, alors,

$$\partial_{j,\varphi_0}(h) = \frac{\partial(hoi_{x,r}o\exp_x o\tilde{z}o\psi^{-1})}{\partial\bar{\theta}_j},$$

$$\frac{\partial(ho\varphi_0)}{\partial\bar{\theta}_j} = \frac{\partial(hoi_{x,r}o\varphi_0)}{\partial\bar{\theta}_j},$$

Donc, si on note $\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l$ les champs de vecteurs canoniques de la sphère par rapport à la carte (ψ, U^k), on obtient, en notant d désigne la différentielle,

$$\partial_{j,\varphi_0} = d(i_{x,r}o\exp_x o\tilde{z})(\bar{\partial}_j),$$

Donc,

$$g^k_{jl}(r,\theta) = g_{\exp_x(r\theta)}[d(i_{x,r}o\exp_x o\tilde{z})(\bar{\partial}_j), d(i_{x,r}o\exp_x o\tilde{z})(\bar{\partial}_l)],$$

d'où, en utilisant la définition du pull-back,

$$g^k_{jl}(r,\theta) = \tilde{z}^*[\exp^*_x[i^*_{x,r}(g)]](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l) = \tilde{z}^*[\exp^*_x(\tilde{g})](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l),$$

le dernier terme à droite dans l'expression précédente, n'est que la composante j, l, de la métrique $\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]$ définie sur la sphére unité $\mathbb{S}_{n-1}$.

Finalement, on peut comparer les expressions locales et globales,

$$-\Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})],\mathbb{S}_{n-1}} uo\exp_x(r\theta) = \frac{1}{r^2\sqrt{|\tilde{g}^k|}}\partial_{\theta^i}[\tilde{g}^{\theta^i\theta^j}\sqrt{|\tilde{g}^k|}\partial_{\theta^j} uo\exp_x(r\psi^{-1})],$$

Maintenant, si on prend la nouvelle métrique sur $\mathbb{S}_{n-1}$ définie par,

$$g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}} = r^{-2}\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})],$$

cette métrique est bien définie et de plus,

$$g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}\,jl} = r^{-2}g_{jl}^k = \tilde{g}_{jl}^k,$$

Nos raisonnements futurs se ferons avec $r > 0$. On obtient,

$$\Delta_{g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}}} = r^2\Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})],\mathbb{S}_{n-1}} = L_\theta(x, r).$$

Remarque : Dans le cas plat, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on n'a pas besoin de tout cela. Dès qu'on a une boule, on peut définir les coordonnées polaires. On ecrit $x = a_i + r\theta$ en polaires. Alors, on passe aux différentielles, on obtient : $dx = dr\theta + rd\theta$ et quand on prend la norme euclidienne, $dx^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$, on voit bien que $d\theta^2$ est la metrique euclidienne restreinte à la sphere, qui est la metrique de la sphere. On obtient alors la formule du Laplacien en polaires dans le cas euclidien, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (formule usuelle dans des cartes, ici, la carte polaire, (r, θ)).($\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta$, Δ_θ est la laplacien de la metrique de la sphere $d\theta^2 = g_{ij}(\theta)$, $d\theta^2 = g_{ij}(\theta)d\theta^i d\theta^j$).

24) Sur les fonctions Green :

Le monograph de Druet-Hebey-Robert est assez clair et precis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la decomposition de cette fonction est de classe C^1. C'est essentielement du au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une recurrence pour prouver que les termes dela decompostion sont Sobolev et continues en dehors de la digaonale. (Ou bien comme dans le monograph de Druet-Hebey-Robert, on fait la difference des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est ecrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara,pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des derivees directionelles).

Les fonctions qu'on considere sont continues en dehors d'un ensemble de mesure nulle (un point ou la diagonale). Elles sont mesurables. Elles sont integrables par les theoremes de comparaisons.

Soit $(\bar{W}, g)$ une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note (M, g).

Soit H la fonction definie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne depend pas de la fonction rayon d'injectivé dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle depend (à gauche en P) du rayon d'injectivé dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur W avec $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$, on peut alors la prolonger par 0 sur ∂W. Alors $\delta(P)$ est continue sur $\bar{W}$.

On pose :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q),\ \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_W \Gamma_i(P, R)\Gamma_1(R, Q)dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P, Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par recurrence les Γ_i sont continues en dehors de la diagonale et pour P ou Q proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le theoreme de la convergence dominee de Lebesgue, on prouve qu'elles sont $W^{1,\infty}$ en dehors de la diagonale en Q car elles sont Sobolev est leur derivees bornees. La fonction $d(P, Q) = d_P(Q)$

est reguliere en Q en dehors de P et en fixant Q elle est Lipschitzienne en P, on alors le fait que $(R,Q) \to \partial_Q d_R(Q)$ est continue en dehors de la diagonale et L^{∞}_{loc}. Donc, par le theoreme de convergence dominee (enlever de petites boules) $\Gamma_i * \partial_Q \Gamma_1$ et $\Gamma_i * \partial_Q H$ sont C^0 en dehors de la diagonale. Donc, les Γ_i et $\Gamma_i * H$ sont C^1 en dehors de la diagonale.(Le point essentiel est la fonction distance).(Concernant la fonction distance, $(R_i, Q) \to d(R_i, Q) = d(R_i, exp_{R_i}(r\theta)), Q = exp_{R_i}(r\theta), \epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3, \theta \in \mathbb{S}_{n-1}$ et la carte de reference est $[B(R_0, \delta(R_0)/3), exp_{R_0}]$ avec $R_i \to R_0$. On voit alors qu'en coordonnes geodesiques polaires centrees en R_i un calcul de $\Delta_{g,Q} d(R_i, Q) \in L^{\infty}$ et $d(R_i, .) \to d(R_0, .)$ et par les estimations elliptiques on a $\partial_Q d(R_i, Q) \to \partial_Q d(R_0, Q)$ pour $d(R_i, Q) \geq \epsilon_0 > 0$.)

Dans le cas où $W = M$ sans bord :

D'apres sa formule explicite H est C^1 en dehors de la diagonale. Elle est $W^{1,1+\epsilon}$ de chaque variable pour un $\epsilon > 0$ assez petit, par recurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli :

$$\partial_P \Gamma_{i+1}(P,Q) = \int_M \partial_P \Gamma_i(P,R) \Gamma_1(R,Q) dR,$$

et,

$$\partial_Q \Gamma_{i+1}(P,Q) = \int_M \Gamma_i(P,R) \partial_Q \Gamma_1(R,Q) dR.$$

Pour une varieté avec bord, on ne peut pas deriver par rapport P, car l'expression de Γ_i et en paticulier de Γ_1 contient δ_P qu'on sait seulement continue et pas forcement differentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions Γ_i sont continues en P en dehors de la diagonales et $L^{1+\epsilon}, \epsilon > 0$ seulement, mais ceci suffit pour prouver la symetrie par le theoreme d'Agmon)

On a aussi, les estimees de Giraud. Ainsi de proche en proche, les Γ_i deviennent de plus en plus regulieres. on utilise le theoreme de Giraud pour prouver que $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$ avec $\lambda + 2 > n$ (donc $\geq n+1$ car λ est entier puisqu'on derive les Γ_i). (Si $\lambda > n-1$ ($\lambda \geq n$) c'est fini (on regarde Γ_{k-1}), si $\lambda = n-1$ alors : $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$ et $\partial_P \Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$ et $\partial_Q \Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$ qui est en log par Giraud et donc $\partial_P \Gamma_{k+1}$ et $\partial_Q \Gamma_{k+1}$ sont $C^0(M \times M)$ par Giraud et donc Γ_{k+1} est $C^1(M \times M)$. (Utiliser le produit de convolution, car Γ_{k+1} et sa derivée Sobolev, est continue pour ecrire qu'elle est $\int \partial_P$, l'integrale d'une fonction continue donc C^1, il a convergence uniforme de la convolution, car la fonction et son Sobolev sont continues). Dans le cas avec bord, Γ_k continue implique que Γ_{k+1} est $W^{1,\infty}$ en Q.(On a mieux C^1 en Q car la fonction $(R,Q) \to \partial_Q d(R,Q)$ est C^0 en dehors de la diagonale de W et H est a support compact (elle s'annule avant le bord) et donc ($\Gamma_k * \partial_Q H$ est C^0 en dehors de la diagonale de $\bar{W}$)).

Dans le cas d'un operateur $-L = -\Delta + h$, la regualrite de Γ_{k+1} depend de celle de h. Si par exemple h est C^1 alors comme precedemment Γ_{k+1} est C^1 de P et Q. Bien sur le Γ_1 change :

$$\Gamma_1(P,Q) = -\Delta_Q H(P,Q) + h(Q) H(P,Q).$$

Remarque : a) sur la borne inferieure de la fonction de Green G_ϵ de $-\Delta + \epsilon = -\nabla^i(\nabla_i) + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

1) On a $G_\epsilon \geq 0$ donc par la propriété de la borne inferieure $m_\epsilon = \inf_{M \times M} G_\epsilon$ existe.

2) Par definition $m_\epsilon = \lim_{\delta \to 0} G_\epsilon(x_\delta, y_\delta)$. Si on suppose que $d(x_\delta, y_\delta) \to 0$, par la propriété du monograph de Druet-Hebey-Robert, $m_\epsilon = +\infty$, ceci n'est pas possible et Comme G_ϵ est continue en dehors de la diagonale. $m_\epsilon = G_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon)$ avec $x_\epsilon \neq y_\epsilon$.

Si on met un indice , i, alors on peut supposer que, $G_i = G_{\epsilon_i}$:

$$\inf_{M \times M} G_i = m_i = G_i(x_i, y_i), \; x_i \neq y_i,$$

Apres, on peut raisonner sur la borne inferieure globale sur tout $M \times M$, au lieu de prendre l'inf sur M en x puis en y.

b) sur les fonctions de Green des variétés à bord. on remarque que par exemple que pour les varietes à bord, la parametrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les theoremes d'Agmon et de regularité dans la construction complete de la fonction de Green dans le cas des varietes a bord, voir le monograph de F.Robert, c'est essentielement l'utilisation des noyaux, la formule sommatoire et les théorèmes d'Agmon.

//

25) Sur la formule de Gauss-Bonnet :

C'est bien ecrit dans le livre de J.Lafontaine, edition 2010.

1) relation entre l'indice d'un champ de vecteurs et la courbure de Gauss.

2) relation entre indice d'un champ de vecteur, fonction de Morse et caracteristique d'Euler-Poincaré.

On a une surface riemannienne compacte sans bord (M, g).

On part d'un champ de vecteur X ayant des zeros. On considère le normalisé $X_1 = X/||X||$, il n'est pas definit aux zeros de X. Puisqu'il y a produit scalaire, on considere X_2 son orthoganle de sorte qu'on ait un repere orthonormé.

(X_1, X_2) est un repere mobile ou "moving-frame". On a une connexion, donc on a de nouveaux symboles de Christoffel et une connexion forme ω. de sorte que $d\omega = \Omega$ la courbure. celle ci n'est pas definie aux zeros de X, puisqu'on considere X_1 et on divise par $||X||$.

(Comme on l'a dit pour la surface $K3$, on a une connexion $\Rightarrow$ symboles de Christoffel $\Rightarrow$ connexion forme (par dualité). Puis on derive $d\omega$ on retrouve la courbure ou forme volume par dualité. C'est bien ecrit dans le livre de J. Lafontaine quand il considere $\nabla_{X_i}(X_j)$. Dans certains livres on note $\omega = \omega_1^2$. On peut le voir comme : quand on calcule $\nabla_i dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k$ pour les champs de vecteurs et les formes differentielles usuelles, ici pour X la forme ω, on calcule $\nabla_X \omega_i = -\omega_i^k(X)\omega_k$, changements de bases, nouveaux symboles de Christoffel.)

Mais au vosinage des zeros on a une carte (canonique si on veut, normalisé) et le passage des champs issus de cette carte notés (Z_1, Z_2) à (X_1, X_2) se fait via un champ de rotations $R = e^{i\varphi}$ (plus precisement de Z_1 à X_1, on voit bien que $X_1 = e^{i\varphi} Z_1$ se contracte vers un vecteur du type $e_1 \times e^{i\varphi}$ car Z_1 est definit sur un voisinage de la singularité et qu'on peut le contracter en un vecteur fixe). (On voit ici que R est homotope a X_1). On note ω_0 la connexion forme pour ce repere mobile ou "moving-frame" (Z_1, Z_2). Alors on a la relation :

$$\omega = \omega_0 - d\varphi.$$

Avec, ω_0 definie au voisinage de la singularité contrairement á ω. (on peut passer á la limite dans la formule de Stokes, voir ci-dessous).

La rotation R est homotope au champ X_1 donc : on a le meme degre topologique.

$$deg(R) = deg(X_1).$$

Or,

$$deg(R) = deg(rotation) = \int d\varphi,$$

et par defintion,

$$deg(X_1) = indice(X).$$

(Pour une fonction de Morse f, on considerera $X = \nabla f$ et l'indice se calcul explicitement dans une carte particuliere, car il ne depend pas de la carte).

Maintenant la formule de Stokes donne, c'est bien ecrit dans le Lafontaine :

$$\int \Omega = \int d\omega = \int \omega \to \int d\varphi = indice(X).$$

Ceci pour la relation entre courbure et indice de champs de vecteurs. (c'est lié a la connexion forme, qui induit la courbure et qui est produite par le repere mobile issu de X).

Maintenant un theoreme, voir le Gramain ou Hirsch (Differential Topology), dit que sur une surface compacte, il y a une fonction de Morse f. On applique, ce qui précède à ∇f. Ceci revient à calculer un nombre lié aux differents indice le la fonction de Morse et qui est bien detaillé dans le livre de Hirsch (Differential Topology). Ceci revient à calculer l'homologie d'un complexe cellulaire et qui donne la caracteristique d'Euler-Poincaré.

Pour ce qui est du calcul de la caractersitique d'Euler d'une somme connexe. C'est bien connu. Voir aussi dans le livre de J. Lafontaine.

//

26) Equation de Liouville : Pourquoi, lorsque la courbure de Gauss d'une surface est constante, K alors $K > 0$ la surface est localement isometrique a la sphere (un ouvert de la sphere), $K = 0$ elle est isometrique au plan (un ouvert du plan), $K < 0$ elle est isometrique a un ouvert de l'espace hyperpbolique ?

En effet soit S une surface de metrique g, alors, on peut definir des coordonnées geodesiques polaires, (r, θ), dans ses coordonnés $g = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2$. Alors la courbure de Gauss verifie l'equation differentielle suivante $\partial_{rr}(\sqrt{G}) + K\sqrt{G} = 0$, avec les conditions a l'origine $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$ et $\partial_r(\sqrt{G}(0, \theta)) = 1$. Clairement lorsque K est une constante , cette equation differentielle s'integre facilement et donne la metrique de la sphere ou du plan ou du plan hyperbolique. ($(\sin r)^2$, ou r^2 ou $(\sinh r)^2$).

Si on note $\varphi : (r, \theta) \to \exp_x(r\theta)$, la carte definissant les coordonnées geodesiques polaires pour la surface S, on ecrit alors, $\varphi^*(g) = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2 = \psi^*(g_0)$, avec ψ la carte definisssant les coordonnes geodesiques polaires, selon qu'on soit sur la sphere, le plan, ou le plan hyperbolique (a partir de la carte exponentielle, $\psi : (r, \theta) \to \tilde{\exp}_y(r\theta)$).

Alors, φ, ψ, qui sont des cartes, sont des diffeomorphisme avec $(\varphi o \psi^{-1})^*(g) = g_0$ et $\varphi o \psi^{-1}$ est l'isometrie cherchée.(Par exemple si $K > 0$, $\varphi : \Omega_1 \subset S \to]0, r_0[\times]a, b[,]a, b[\subset \mathbb{S}_1$ et $\psi : \Omega_2 \subset \mathbb{S}_2 \to]0, r_0[\times]a, b[,]a, b[\subset \mathbb{S}_1$, sont deux cartes dont les images sont les memes dans $]0, r_0[\times]a, b[,]a, b[\subset \mathbb{S}_1$ et $\psi^{-1} o \varphi : \Omega_1 \subset S \to \Omega_2 \subset \mathbb{S}_2$).

27) Sur le flot de Ricci et la conjecture de Poincaré : l'idée est qu'on déforme une metrique, a partir de l'equation du flot de Ricci pour obtenir une metrique de courbure de Ricci strictement positive, puis on réutilise le flot de Ricci pour deformer la metrique pour obtenir une metrique de courbure sectionelle constante positive, (la variété est simplement connexe et compacte), elle est alors diffeomorphe a la 3-sphere :

a) On part du Resultat de Gao et Yau ou Lohkamp, il existe toujours une metrique de courbure de Ricci strictement negative. Puis on utilise le flot de Ricci.

b) Par le blow-up et les estimations de Hamilton, on deforme la metrique pour obtenir une metrique de courbure de Ricci positive ou nulle (blow-up, a la limite). Ici, c 'est dit dans le monograph de John-W Morgan et Gang Tian (Ricci flow and The Poincaré conjecture), on étend petit a petit le flot de Ricci par chirurgie (le travail de Perlman). La conjecture de Geometrisation. On passe d'une variété de courbure negative strictement à une variété de courbure positive ou nulle. (on change de metrique). (heuristiquement, si on note $R_k = \max R_t$ avec R_t la courbure scalaire, en divisant par R_k, on aurait, $Ricci < b(n) < 0 \Rightarrow \dfrac{Ricci}{R_k} > \dfrac{b(n)}{R_k} \to 0$, si $k \to +\infty$. En faisant le blow-up, a) on change d'echelle, b) il faut "recoller" les morceaux a la limite, pour avoir une variété et une metrique reguliere qui sera de courbure sectionelle positive ou nulle, c) la variété en question est notée $\mathbb{M}$ de metrique g, dependant du temps et de l'espace et obtenue par chirurgie (à la limte), telle que $\mathbb{M}(0) = \mathbb{M}_\infty(0) = M$ et $g(0) = g_\infty(0)$, avec M la variété de départ sur laquelle on a une nouvelle metrique, $g(0) = g_\infty(0)$ de courbure positive ou nulle.).

(Dans le cas blow-up avec $R_k \not\to +\infty$, voir l'article de Hamilton, réference 36 dans Morgan-Tian, on ne peut pas avoir collapse par les théorémes de comparaison, voir Morgan-Tian (derniers chapitres, 15-16-17), on ne peut pas avoir $(0 \neq \pi_1(H_1) \subset ou = \pi_1(M) = 0)$, H_1 non compacte est diffeomorphe a M qui est compacte, ce n'est pas possible, voir l'article de Hamilton, réference 36 de Morgan-Tian et on obtient alors la convergence. Notons le flot de Ricci ici est defini sur $(0, +\infty)$, sinon , on l'etend petit a petit, comme pour le Theoerme des equations differentielles, de Cauchy, ou le Theoreme des Geodesiques avec en plus le tenseur de $Riemann$ uniformement borné (derniers chapitres de Morgan-Tian, pour la non collapse et donc convergence dans ce cas $R_k \not\to +\infty$). C'est ce qu'on a ecrit avant, dans l'ecriture ci-dessus entre $Ricci, R_k, b(n)$, c'est la convergence vers une metrique de courbure de $Ricci > 0$ partout.)

c) Dès qu'on a une metrique de courbure de Ricci positive ou nulle, elle doit etre strictement positive quelque part, car comme on est en dimension 3 ($Weyl = 0$), si $Ricci = 0$, la variété ne peut pas etre compacte, car elle serait de courbure sectionelle nulle et simplement connexe, elle serait difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ (On a $Riemann \geq 0$. Si $Riemann = 0 \Rightarrow Ricci = 0$ la variété compacte M serait diffeomorphe a l'espace euclidien, ce n'est pas possible. Donc $\exists\, x_0$ tel que $Rimann_{x_0} \neq 0$ et ≥ 0, en utilisant les valeurs propres de $Riemann \geq 0$ qui devient alors symetrique (Voir Morgan-Tian), il y a au moins une valeur propre $\lambda_{x_0} > 0$, comme $Ricci_{x_0} =$

$trace(Riemann_{x_0})$ alors, (la trace ne depend pas de la base), $Ricci_{x_0} = \lambda_{x_0} + \mu_{x_0} + \nu_{x_0} \geq \lambda_{x_0} > 0$ et donc, $Ricci_{x_0}(\theta, \theta) > 0, \forall \theta \in \mathbb{S}_2$). Par un argument d'Aubin, il existe une métrique conforme telle que la courbure de Ricci est partout strictement positive.

d) On conclut grâce au travail de Hamilton, on déforme la metrique par le flot de Ricci jusqu'a obtenir une metrique de courbure sectionnelle constante positive. la variété est simplement connexe et compacte, c'est la 3-sphere.

28) Sur l'article de Chen-Li :

On a aussi la compacité globale de Chen-Li, cité dans la section 4.1. Le resultat de Chen-Li utilise le fait qu'on a compacité au voisinage du bord lorsque $||\nabla \log V|| \leq A$, puis il etend ce resultat lorsque $||\nabla V|| \leq A_1$, pour cela il utilise l'extension des resultats de Brezis-Merle (Theorem 1 de Brezis Merle), qui reste vrai dans des domaines Lipschitzien dès qu'on a la regularité des solutions dans $W_0^{1,2}$, car le principe du maximum est valable dans ce cas (on utilise l'integration par parties, qui est vrai des que la regularité du bord est Lipschitzien. Pour l'inegalité de Sobolev aussi et la resolution d'un probleme variationnel dans L^2. Lipschitz suffit). Ceci pour la fonction u_2 du debut de preuve de Chen-Li. (et aussi l'extension des fonctions harmoniques et la formule de Poisson, pour u_1 qui necessite une application conforme). Voir la preuve du corollaire de l'article de Chen-Li.

(Voir l'article de Sweers-Nazarov. Journal.Diff.Equations. 2007. Pour les conditions de regularité $W^{2,p}$ des problemes sur des ouverts Lipschitziens.)

Remarque sur la preuve de Chen-Li : pour etendre la partie u_1 harmonique, il faut supposer le domaine analytique, pour pouvoir utiliser une transformation conforme qui reste invariante par le Laplacien. Principe de symetrisation de Schwarz. Donc, le resultat de compacité reste vrai avec la regularité smooth, lorsque on suppose $||\nabla \log V|| \leq A$. Mais la regularité du domaine doit etre supposée analytique lorsqu'on passe a $||\nabla V|| \leq A_1$.

Dans leur preuve Chen-Li, utilisent le fait que l'operateur est invariant par appplication de carte, ceci est possible si cette application est conforme, elle preserve le Laplacien. Puis, symetrise la fonction en symetrisant un probleme de Dirichlet, puis soustrayent les valeurs aux bords et ils obtiennent l'image de v_1. Alors u_1 est l'image de v_1 par l'application de carte. Maintenant pour construire v_1 ils utilisent une symetrisation d'un probleme de Dirichlet, qui requiert les solutions dans $W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon), p > 2$ (la formule de representation de Green reste valable, dans ce cas, voir la preuve dans Gilbarg-Trudinger). Puis, ils utilisent la formule integrale de Poisson (qui necessite d'avoir l'operateur Laplacien).

a) Pour utiliser la formule de Poisson, on conserve le Laplacien : transformation conforme φ.

b) Ils symetrisent $uo\varphi$ ils obtiennet une fonction $u_v \in C^1(\bar{B}_\epsilon(0)) \cap W^{2,p}$.

c) Ils resolvent : $-\Delta v_1 = -\Delta u_v$ avec condition de Dirichlet sur $B_\epsilon(0)$.

d) Ils utilisent la formule integrale de Poisson pour $v_1 - u_v \in W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon), p > 2$. Sur le bord, il n'y a que les valaurs de u.

(Ce travail revient à symetriser une fonction harmonique qui nécessite le theoreme de symetrisation de Schwarz , qui necessite une application conforme, donc un domaine de depart Ω analytique).

Remarque : sur le fait que la régularité du domaine dans (De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li) est au moins $C^{2,\beta}, \beta > 0$. Soit $\alpha_y =< \nu_1 | \nu(y) >$, l'angle avec la normale qui doit etre > 0, avec $y \in \partial\Omega$, qu'on devrait obtenir pour appliquer la méthode moving-plane. Ici, $\nu(y)$ est la normale au bord en y : Pour definir l'angle, il suffit d'avoir une tangente a la courbe de $y \to \nu(y)$, et donc une dérivée de $\nu(y)$, (l'application de carte φ est au moins deux fois dérivable). Pour avoir une branche continue de 'cones', il suffit que $y \to (\nu(y))'$ soit continue, (l'application de carte φ est C^2, φ'' continue). Pour que l'angle $\alpha_y > 0$ soit strictement positif, il suffit que la tangente a la courbe de $\nu(y)$ soit non nulle, il suffit alors d'avoir la regularité $C^{0,\beta}, \beta > 0$ de la tangente (forme arrondie : continue et arrondie : $C^{0,\beta}$).(Donc, il suffit que l'application de carte soit $C^{2,\beta}, \beta > 0$).

29) Sur l'article de C.C. Chen et C.S. Lin : (Comm. Pure. Appli. Math. 1997) :

1) Application du principe du maximum et le lemme de Hopf

2) Fonction auxiliere pour attenuer la perturbation due a la variation de la courbure scalaire prescrite et les conditions aux bords.

3) Ils s'assurent de la positivité de la fonction finale obtenue comme somme d'une fonction et la fonction auxilière. La positivité sert dans le raisonnement par l'absurde quand on prend le sup des λ tel que ..., le fait de prendre un sup signifie qu'au dela du sup les fonctions sont negatives ou nulles en des points, les conditions dans cet articles assurent que le point limite reste dans le domaine (car les fonctions sont strictement positives au voisinage du bord), ils appliquent le principe du maximum et (ou) le lemme de Hopf au point limite (point minimum, on peut parler de principe du minimum ou principe du maximum). (raisonnement par l'absurde ($\sup \lambda < \lambda_1 = -1/4$) et application du principe du maximum et le lemme de Hopf au point limite qui est censé etre à l'interieur du domaine).

De plus, les fonctions h_λ sont C^1, pour le voir, elles sont definies par la representation integrale de fonction de Green, elles verifient au sens des distributions et d'Agmon C_0^2, une EDP, ici aussi on utlise Fubini, Fubini-Tonelli et les definitions des fonctions de Green au sens C_0^2 pour les fonctions test, pour se ramener au Theoreme d'Agmon et conclure que h_λ sont C^1. (Ecrire $\Delta(h^\lambda - h^\mu) = \bar{Q}_\lambda - \bar{Q}_\mu$, pour la continuité en λ). Aussi, $h^\lambda \geq 0$ sont nulles au bord $\Rightarrow \partial_{x_1} h^\lambda \geq 0$ et par le lemme de Hopf $\partial_\nu (w_\lambda - h^\lambda) < 0$, (principe du minimum), avec $\partial_\nu = -\partial_e = -\partial_{x_1}$, donc, $\partial_{x_1} w_\lambda > \partial_{x_1} h^\lambda \geq 0$).

4) pour prouver que les courbures prescrites sont nulles au point "blow-up", ils utilisent un raisonnement du type $K(y) = \int_0^1 < \nabla K(y_i + sM_i^{-2/(n-2)} I_\delta(y)) | M_i^{-2/(n-2)} I_\delta(y) > ds$ puis font la difference :

$$K(y) = \int_0^1 < [\nabla K(y_i + sM_i^{-2/(n-2)} I_\delta(y)) - \nabla K(y_i)] | M_i^{2/(n-2)} I_\delta(y) > ds +$$

$$+ M_i^{-2/(n-2)} < \nabla K(y_i) | I_\delta(y) >$$

a) Dans le premier ensemble $I_\delta(y)$ est borné car y est borné, et son symetrisé aussi, car $\lambda_0 \leq \lambda \leq -1/4$.

b) Dans la preuve de l'estimation asymptotique $M_i^{2/(n-2)} |\nabla K_i(y)|^{1/(\alpha-1)} \leq C$,, on utilise le raisonnement ci-dessus des que le gradient est holderien ou C^2. (comme la difference ci-dessus et un raisonnement du type $|\nabla K(y_i + M_i^{-2/(n-2)} I_\delta(y)) - \nabla K(y_i)| \leq BM_i^{-2\alpha/(n-2)} |I_\delta(y)|^\alpha$ dans la formule de Taylor integrale (ci-dessus). Et apres les integrales du type Giraud. Dans la partie qu'ils considere, les $M_i^{-2/(n-2)} I_\delta$ sont bornées.

30) Sur le probleme de Brezis-Merle : Pourquoi la condition sur le potentiel V est $W^{1,\infty}$ pour obtenir la compacité des solutions $u > 0$?

1) On a e^u et le potentiel V sont liés par dualité $\int V e^u < +\infty$, $e^u \in L^1, V \in L^\infty$. on considere le potentiel V comme une forme lineaire, une distribution et donc de possibles derivées (entieres).

Par dualité et le fait qu'on considere le probleme de maniere globale : on a : la condition maximale et globale $e^u \in L^1 = W^{0,1}$, par dualité des Sobolev, le minimum requis pour le potentiel V est $W^{1,\infty}$. Si on veut diminuer la régularité de $V \in W^{1-s,\infty}, 1 > s > 0$, qui est presque l'espace $(1-s)-$holderien, alors par dualité, e^u doit etre $e^u \in W^{s,1} > W^{0,1} = L^1$, or la condition $e^u \in L^1$ est maximale.

a) $e^u \in L^1 = W^{0,1}$: pas de derivée pour e^u et $e^u \in L^1 \Rightarrow$ au moins une derivée pour V et $V, \nabla V \in L^\infty \Leftrightarrow V \in W^{1,\infty}$ au minimum :

b) Si on veut diminuer la régularité de V et utiliser la dualité et l'integration par parties, on part aussi du fait qu'on a la compacité pour $V \in W^{1,\infty}$:

$\int \nabla V \cdot e^u < +\infty \Rightarrow \int \nabla^{1-s} V \cdot \nabla^s (e^u) < +\infty \Rightarrow e^u \in W^{s,1} > W^{0,1} = L^1$, or la condition $e^u \in L^1$ est maximale.

2) Le cas holderien depend du point et du nombre de points, il est local. On a la compacité avec $\int V e^u \leq bC < 16\pi$ ou $\int V e^u \leq bC < 24\pi$ et V holderien uniformement. Brezis et Merle donnent des exemples de (u, V) qui blow-up avec $\int V e^u \leq bC < 16\pi$ ou $\int V e^u \leq bC < 24\pi$.

31) **Remarques :** Du point de vue de la logique mathématique (donc du point de vue mathématique), sur le blow-up et la compacité en dimension 2 et concernant l'article de Wei-Ye-Zhou (dans Annales de l'IHP, 2008) :

i) On donne des conditions pour qu'un raisonnement blow-up au bord soit possible (En plus, il y a des exemples comme celui de Brezis-Merle).

ii) On donne des conditions pour que le raisonnement mis en defaut par Wei-Ye-Zhou (voir point, iv, ci-dessous), de compacité soit possible.

iii) On donne des conditions pour qu'un raisonnement par l'absurde soit possible.

iv) Dans Wei-Ye-Zhou (Annales de l'IHP, 2008), lorsque $a = constante$ au voisinage du bord, les solutions sont bornées au voisinage du bord, par la méthode directe, moving-plane, de, De Figueiredo-Lions-Nussbaum (sous-critique, 1982), Suzuki (1990), Chen-Li(1993) et Ma-Wei(2001), (Ma-Wei, en donnent une nouvelle preuve directe, dans convegence for Liouville Eq.). Il n'y a pas d'analyse blow-up a faire. Il n'y a pas de raisonnement par l'absurde à faire. Et dans la compacité, on obtient à la limite $0 = 0$, dans l'identité de Pohozaev-Rellich, ce qui ne veut rien dire.

(Assertion, A : $\exists U$ un voisinage du bord $\partial\Omega$, $\exists C > 0$, pour toute solution $u > 0$ de l'Eq avec condition de Dirichlet, $||u||_{L^\infty(U)} \leq C$. Wei-Ye-Zhou disent que A est vraie, ils ne peuvent pas supposer $nonA$ vraie, ils ne peuvent pas faire un raisonnement par l'absurde)

(Argument supplémentaire à l'article de Wei-Ye-Zhou (Annales de l'IHP, 2008) : Lorsqu'on met un potentiel V : l'analyse blow-up est possible. Par contre la compacité, elle est donnée par Chen-Li, dans le cas V Lipschitzien, par la méthode directe, moving-plane. Il n'y a pas de raisonnement par l'absurde à faire. Dans la compacité, qui nécéssite V Lipschitzien, dans Wei-Ye-Zhou, on obtient à la limite $0 = 0$, ce qui ne veut rien dire.)

Ceci dans le cas $a = constante$ au voisinage du bord et le potientiel constant. Wei-Ye-Zhou, mettent en defaut ce raisonnement par l'absurde. On donne des conditions pour que le raisonnement par l'absurde soit possible.

Dans le cas $a \neq constante$, au voisinage du bord et le potentiel constant (le but de l'article de Wei-Ye-Zhou, Annales de l'IHP, 2008), la preuve n'est pas correcte, ce qui veut dire que le raisonnement par l'absurde n'est pas possible.

Concernant l'article : Note on the Chen-Lin result with the Li-Zhang method. Là aussi, on dit que le raisonnement par l'absurde est possible. C'est ce que prouvent Chen-Lin.

L'assertion : $(A : \sup + \inf < +\infty)$. Alors : $(non\, A : \sup + \inf \to +\infty)$.

Chen-Lin font :

Etape 1 : $(non\, A : fausse)$ (Chen-Lin).

Etape 2 : $(non\, A : fausse) \Rightarrow (A : vraie)$.

Dans, Note on the Chen-Lin result with the Li-Zhang method : on dit que l'etape 1 est vraie ou possible; $((non\, A : fausse) : vraie)$.(hypothèse $nonA : vraie$, implique contradiction). Le raiseonnement par l'absurde est possible dans Chen-Lin.

//

Pour revenir à l'article de Wei-Ye-Zhou :

1) Supposons qu'on puisse definir ou considrer, v, la symetrisée de Schwarz par rapport à l'axe des ordonnées de u. Alors, v et ses derivées successives a droites et a gauche sont bornées. De plus v est solution au sens des distributions :

$$-\Delta_{distr} v = We^{|v|} = Heaviside$$

On se place au voisinage de 0. Si on derive une fois par rapport a la premiere variable, $\partial_1 v$ est solution au sens des distributions, un dirac sur l'axe des ordonnées :

$$-\Delta_{distr}(\partial_1 v) = -\partial_{1,distr}(\Delta v) = -\partial_1(\Delta v) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k\varphi(0, x_2) dx_2,$$

avec $k = -2\Delta u(0, x_2) > 0, x_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$, au voisinage de 0,

$$-\Delta_{distr}(\partial_1 v) = -\partial_1(\Delta v) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k\delta_{(0,x_2)} dx_2$$

On note $G((0, x_2), y) = -\frac{1}{2\pi} \log ||(0, x_2) - y|| = -\frac{1}{2\pi} \log |(x_2 - y_2)^2 + y_1^2|$ le potentiel Newtonnien et $h_0(y) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} kG((0, x_2), y) dx_2$, $h_0 \in L^p, p > 1$:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(0, x_2) dx_2 = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_{(0,x_2)} dx_2 = \int_{B(0,\epsilon)} -h_0(y)\Delta\varphi(y) dy,$$

C'est a dire que :

$$-\Delta_{distr}(\partial_1 v - h_0) = -\partial_1(\Delta v) \in L^\infty$$

On a par les estimations elliptiques :

$$\partial_1 v - h_0 \in C^1(B(0,\epsilon))$$

Or, $\partial_{11} v$ est reguliere et bornée en dehors de l'axe des ordonnées et h_0 est reguliere en dehors de l'axe des ordonnées.

Donc, $\partial_1 h_0$ serait bornée en dehors de l'axe des ordonnées. $\exists C > 0, \forall y \in B(0,\epsilon) - \{(0,x_2), x_2 \in (-\epsilon,\epsilon)\},\ |\partial_1 h_0(y)| \leq C.$

Or, $h_0(y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \log|(x_2-y_2)^2 + y_1^2| dx_2$, et si on derive par rapport a y_1 on a :

$$\partial_1 h_0(y)|_{\{y_1\to 0, y_2 \to 0, y_1 \neq 0\}} \equiv \frac{1}{y_1} \to +\infty$$

Ce qui est contradictoire avec le fait qu'en dehors de l'axe des ordonnées, $\partial_1 h_0$ est bornée.

Donc, on ne peut pas considerer v, v n'est pas definie, n'existe pas, avec autant d'informations.

2) De meme, si on considere, w la fonction reflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son laplacien serait comme precedemment une somme de Dirac + une fonction L^∞. Si on considere $\partial_1 w - \partial_1 h_0$ elle serait $C^0(B(0,\epsilon))$, ce qui impliquerait que $\partial_1 h_0$ serait bornée en dehors de l'axe des ordonnées, comme precedemment, c'est pas possible.

$$-\Delta_{distr} w = -\Delta w + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k_0 \varphi(0,x_2) dx_2, k_0 > 0,$$

$$-\Delta_{distr} w = -\Delta w + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k_0 \delta_{(0,x_2)} dx_2$$

Donc pour 1) et 2) on ne peut pas considerer, v et w, ces fonctions n'existent pas, avec autant d'informations.

//

Concernant le "blow-up" au bord :

Il faut fixer une mesure :

On veut qu'il existe une sous-suite $(u_{i_j})_j$ et des points $y_1,\ldots,y_m$ telle que cette sous suite converge sur tout compact de $D_m = \bar{\Omega} - \{y_1,...,y_m\}$. Pour cela on fixe un nombre maximal m. Qui dit que ce m existe ? et faut que toute sous-suite de la sous-suite converge aussi, cela veut dire qu'il faut que $V_{i_j} e^{u_{i_j}}$ converge, au moins faiblement. Cela veut dire, que c'est possible si on a au moins, de la convergence, meme faible $V_{i_j} e^{u_{i_j}} \rightharpoonup \mu$. Cela est possible si il y a convergence faible vers une quantité μ.

Par exemple, on fixe, les points de concentration et D_m, soit (K_n) une suite exhaustive de compacts de D_m. On doit avoir, $\liminf_{\epsilon_{i_j}} \int_{B(y_k,\delta)} \epsilon_{i_j} e^{u_{\epsilon_{i_j}}} dx \geq \alpha > 0$, on prend le sup sur chaque compact K_n, ces points convergent vers $y_0 \in K_n$ pour une sous-suite, il faut alors que la sous-suite $(u_{i_{j,k}})_k$ verifie :

$\liminf_{\epsilon_{i_{j,k}}} \int_{B(y_0,\delta_0)} \epsilon_{i_{j,k}} e^{u_{\epsilon_{i_{j,k}}}} dx < \alpha$, qui dit que c'est vrai ?

c'est a dire que la nouvelle sous-suite, conserve, la notion de convergence, en dehors des points de concentrations de depart, $y_1,...,y_m$. cela veut que, a chaque fois qu'on extrait une sous-suite, cette suite converge sur les compacts de D_m. Or ceci n'est que la defintion de la convergence vers une quantité fixée, de la suite de depart.(Sinon, on aurait un autre point de concentration, et on arrive pas a fixer une sous-suite qui converge, ca se casse a un certain moment, on n'aura pas construit de sous-suite concergente et l'arret dit qu'on n'a pas construit de sous-suite convergente, ce n'est pas le bon candidat a la convergence).

Quand on a une suite pour la quelle, toute sous-suite , converge et est stable, cela veut dire que la suite de depart converge vers une quantité fixée. ceci est possible si on a au moins la convergence faible. C'est ce qu'on a dit précedemment.

//

On ne peut pas considrer une mesure sur $\bar{\Omega}$, comme dans le deuxieme livre de Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDEs :

Supposons qu'on puisse considrer une mesure sur $\bar{\Omega}$. L'espace total sur le quel on se place et sur lequel on considere les mesures (de Radon) est : $X = \bar{\Omega}$. On se place donc sur $X = \bar{\Omega}$. les fonctions $u_\epsilon \in C^0(\bar{\Omega})$, c'est a dire qu'il faut prendre en compte les points de $\partial\Omega$ et les voisinages $V_{\partial\Omega}$ des points de $\partial\Omega$. Il faut definir ce que c'est $L^p(\bar{\Omega})$ et en particulier $L^1(\bar{\Omega})$, pour cela il faut une mesure de Radon μ_0 sur $\bar{\Omega}$, c'est difficile à definir, comme dans le livre d'Aubin et definir l'integrale Riemannienne, par des cartes. Supposons qu'on puisse definir μ_0. Alors, comme $u_\epsilon \in C^0(\bar{\Omega})$, cette fonction $\epsilon e^{u_\epsilon} \in L^1(\bar{\Omega})$ qui est un espace qui n'a pas beaucoup de sens, or on sait d'apres l'hypothese du probleme que : $\epsilon e^{u_\epsilon} \in L^1(\Omega) \neq L^1(\bar{\Omega})$. On voit alors que ϵe^{u_ϵ} est dans deux espaces qui n'ont rien avoir l'un avec l'autre, ce qui veut dire que c'est pas bien definit. De plus $L^1(\bar{\Omega})$ n'a pas beaucoup de sens(on le definit comme dans le livre d'Aubin par des cartes, localement, on definit μ_0 localement par des cartes, comme dans le livre d'Aubin. Cet espace $L^1(\bar{\Omega})$ n'est pas familier, c'est pour cela qu'on dit qu'il n'a pas de sens, mais si on se place sur l'espace total $X = \bar{\Omega}$, il faut bien definir μ_0). On a quelque chose du type : $\epsilon e^{u_\epsilon} \in L^1(\bar{\Omega}) \neq L^1(\Omega) \ni \epsilon e^{u_\epsilon}$, avec deux espaces $L^1(\bar{\Omega})$ et $L^1(\Omega)$, qui n'ont rien a avoir l'un avec l'autre, car, les tribus Boreliennes sont differentes et n'ont rien avoir l'une avec l'autre, et les mesures sont differentes, une definie sur l'espace localement compact Ω, pour la mesure de Lebesgue, et l'autre, μ_0 definie sur $\bar{\Omega}$. Alors qu'il faut considrer les mesures de Radon sur $\bar{\Omega}$, ce qui n'est pas le cas de celle de $L^1(\Omega)$.

Pour la construction d'une mesure de Radon par les cartes sur un domaine a bord regulier $\bar{\Omega}$, comme dans le livre d'Aubin. On a dit que ce n'est pas naturel, ceci est du à la partition de l'unité. Il se peut que le support d'une des fonctions de la partitions touche le bord $\partial\Omega$. Il y a un probleme avec la partition de l'unité.

//

(32) **Sur le degré topologique et l'equation avec non linearité exponentielle :**

Voir l'article de Brezis-Turner. Comme on l'a dit concernant l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum, ils considerent un operateur M tel que $M(0) = 0$, nulle en 0. On peut considerer :

$$-Lu = V(x)(e^u - 1),\ 0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1,\ ||\nabla V||_\infty \leq A$$

$f(u) = e^u - 1$ et $f(0) = 0$, $(-L)^{-1}$ un operateur compact. voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : $M = (-L)^{-1}(V(x)f(u))$. λ_1 premiere valeur propre de $-L$ avec condition de Dirichlet.

Voir l'article de Brezis-Turner. Une des conditions pour prouver l'existence de solutions est : $g(x, u, p)/u < \lambda_1$ pour u voisin de 0. et la presence de la nonlinearité exponentielle en $+\infty$ assure que les $t \geq 0$ de l'article de Brezis-Turner sont uniformément bornés. Il reste à borner les solutions u positives ou nulles pour appliquer la théorie du degré topologique. Ceci se fait par l'identité de Pohozaev en ramenant l'equation précédente a l'equation qu'on a considéré dans des articles précédents avec seulement e^u et non $e^u - 1$. En resolvant $-Lw_1 = V, -Lw_2 = tJ$ avec condition de Dirichlet, ($J = \varphi_1$ premiere fonction propre) ces fonctions w_1, w_2 sont uniformément bornées dans $C^2(\bar{\Omega})$ car t est borné unifromément et V aussi. Donc, on s'est ramené, dans un domaine régulier etoilé par rapport a l'origine a notre equation considrée dans des articles précédents et l'identié de Pohozaev donne le résultat de borne uniforme de u, comme voulu dans Brezis-Turner.

Voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum, pour l'idée sur le degré topologique et son applications.

Voir l'article de : H.H.Zou dans Calculus of variation. Pour une idée sur l'application du degré topologique.

Voir aussi, l'article de Brezis-Turner.

Donc :

Degré topologique $\Rightarrow \forall V \in C^\infty, 0 < a \leq V \leq b < \lambda_1,\ ||\nabla V||_\infty \leq A,\ \exists u \in C_0^2(\bar{\Omega}),\ -Lu = V(x)(e^u - 1)$, et $u > 0$ dans Ω.

Soit w tel que $-Lw = V$ avec condition de Dirichlet. Par le principe du maximum, théorème de Dualité et les estimations elliptiques, $w \geq 0$ et $w > 0$ dans Ω et $||w||_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c_1(a, b, A, \Omega)$. Soit $W = Ve^{-w}$, alors w et $u+w$ sont deux solutions distinctes de $-Lv = We^v$ avec conditions de Dirichlet et $0 < a_1 \leq W \leq b < \lambda_1$, et $||\nabla W||_\infty \leq A_1$, avec $||v||_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$.

Donc : Pour tout V on a W dans le meme type de classe avec deux solutions distinctes par le degré topologique et l'ensemble des solutions est borné dans $C^2(\bar{\Omega})$.

On a : Pour tout V il existe W dans la meme classe que V tel que l'equation $-Lv = We^v$ (avec condition de Dirichlet), possede au moins 2 solutions distinctes dont une topologique et ces solutions sont bornées uniformément dans $C^2(\bar{\Omega})$.

Donc : si on note C le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$.

Degré topologique $\Rightarrow$ $deg = i_C = -1 \Rightarrow$ il y a un point fixe pour $u \to M(u) \Rightarrow \forall V \in C^\infty, \exists W \in C^\infty$, $W(x) = V(x)e^{-w}$, tel que l'equation $-Lv = We^v$ possede 2 solutions distinctes dans $C_0^2(\bar{\Omega})$ pour W avec $0 < a_1 \leq W \leq b_1 < \lambda_1$ et $||\nabla W||_\infty \leq A_1$ et $||v||_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a,b,A,\Omega)$.

1) Donc on a : Pour tout V il existe W dans la meme classe que V tel que l'equation $-Lv = We^v$ (avec condition de Dirichlet), possede au moins 2 solutions distinctes dont une topologique et ces solutions sont bornées uniformément dans $C^2(\bar{\Omega})$.

2) a)(Equation sinh-Poisson en mecanique statistique et en physique des plasmas). On peut prendre $M = (-\Delta)^{-1}(V(x)g(u))$ avec $g(u) = \sinh(u)$. On obtient alors $u > 0$ solution par le degré topologique de l'equation sinh-Poisson, qui modelise la 2d-turbulance en mecanique statistique et apparait en physique des plasmas. Voir les prints de Pablo Figueroa et de Joel Spruck. Donc : si on note C le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$, on a $deg = i_C = -1$ et l'application $u \to M(u)$ possede un point fixe.(Voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum et ce qu'on a ecrit sur le degré topologique, au debut de ce print). Et on a une solution topologique de : $-\Delta u = V(x)\sinh(u)$ avec condition de Dirichlet et $u \not\equiv 0$, $u \geq 0$ (par le principe du maximum $u > 0$ dans Ω), pour $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$ et $||\nabla V||_\infty \leq A$ ou V avec poids holderien $(1 + |x-x_0|^{2\beta}), \beta \in (0, 1/2), x_0 \in \partial\Omega$ avec Ω particulier, une couronne et, $A = \frac{a}{2(1+2^{2\beta})}$, la solution u est uniformément bornée dans $C^2(\bar{\Omega})$, $||u||_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a,b,\beta,\Omega)$.

b) On peut faire la meme chose en considerant une singularité au bord. On peut prendre $M = (-\Delta)^{-1}(\frac{V(x)}{|x-x_0|^{2\alpha}}g(u))$ avec $g(u) = \sinh(u)$, $x_0 \in \partial\Omega$, Ω une couronne et $\alpha \in (0, 1/2)$, (ca reste vrai avec $\alpha \in (-\infty, 0)$), et λ_1 premiere valeur propre avec condition de Dirichlet et avec poids singulier, ($-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1\frac{1}{|x-x_0|^{2\alpha}}$, qu'on resout par la methode variationnelle comme dans le cas regulier), et $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$, $||\nabla V||_\infty \leq A = \dfrac{(-\alpha+1)a}{2}$. Si on note C le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$, on a $deg = i_C = -1$ et l'application $u \to M(u)$ a un point fixe et on obtient une solution topologique de : $-\Delta u = \frac{V(x)}{|x-x_0|^{2\alpha}}\sinh(u)$, $u \not\equiv 0$ et $u \geq 0$ (par le principe du maximum $u > 0$ dans Ω) avec condition de Dirichlet et la solution u est uniformément bornée dans $C^1(\bar{\Omega})$, $||u||_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c(a,b,\alpha,\Omega)$.

c) On obtient la meme chose avec $\alpha \in (-\infty, 0)$ avec une solution topologique avec singularité au bord et bornée uniformément dans $C^2(\bar{\Omega})$.

d) On peut faire la meme chose que dans le point a) avec l'operateur L du point 1), on prend $M = (-L)^{-1}(V(x)g(u))$ avec $g(u) = \sinh(u)$. On obtient dans le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$, $deg = i_C = -1$ et $u \to M(u)$ a un point fixe. On obtient une solution topologique de : $-Lu = V(x)\sinh(u)$ avec condition de Dirichlet et $u \not\equiv 0$ et $u \geq 0$ (par le principe du maximum $u > 0$ dans Ω), pour V tel que, $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$ et $||\nabla V||_\infty \leq A$, Ω un domaine régulier etoilé par rapport à l'origine, λ_1 premiere valeur propre de $-L$ avec condition de Dirichlet, la solution u est uniformément bornée dans $C^2(\bar{\Omega})$, $||u||_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a,b,A,\Omega)$.

Remarque : Lorsque $V \equiv a = b \geq \lambda_1$, par un argument d'integration et integration par parties de la solution l'Eq si elle existe ; avec la fonction propre et de positivité, il n'y a pas de solution à l'Eq. De meme pour $b \geq V \geq a \geq \lambda_1$, il n'y a pas de solutions. Par contre Il y a des solutions si $b < \lambda_1$.

e) Ceci s'applique aux systemes du type $-\Delta u = Ve^v, -\Delta v = We^u$ avec conditions de Dirichlet en considerant un operateur de vecteurs :

$M(u,v) = (-\Delta)^{-1}(V\sinh v, W\sinh u) + t(\varphi_1, \psi_1)$, $t \geq 0$, avec singularité interieure x_0, (pour le cas holderien d'odre $\beta > 0$, ca marche avec une singualrité pour une equation dans un systeme, reste le cas ou on a la singularité interieure holderienne dans les deux equations du systeme.) ou singularité au bord x_0 et φ_1, ψ_1 premieres fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet. avec singularité ou pas, $(-\Delta)^{-1}$ s'applique aux deux equations du systeme.

Dans le cas de singularité interieure $0 = x_0 \in \Omega$, l'estimation a priori au voisinage du bord est obtenue dans les articles de, De Figueiredo-Do O-Ruf au bord et interieure (Par la methode moving-plane, comme dans De Figueiredo-Lions-Nussbaum, De Figueiredo-Do O-Ruf le font et le disent dans leur article) et Bartolucci-Tarantello-Chen-Lin (eux utilisent Pohozaev-Rellich pour quantifier, calculer la masse) pour une equation et x_0 singularité a l'interieure, c'est vrai pour une equation (reste le cas d'un systeme avec 0 comme singularité positive dans les deux equations du systeme).

Ici, on s'interesse au cas avec singularité au bord, pour des systemes avec singularité au bord ou poids Holderien avec singualrité au bord, sur une couronne c'est possible.

Remarque sur les inégalités du type Harnack $\sup \inf$ **:**

a) La théorie des cordes (string theory) unifie les théories de Jauge (des champs), des champs conformes, (théorie des champs de Liouville), de Yang-Mills, et la gravitation quantique (Kaluza-Klein, $n+1$, $n = 3, 4, 5, 6, 9, 10$ ou plus générale $n \geq 3$). Les inégalités du type Harnack apparaissent dans ces trois théories, on peut considerer alors que cette notion est une notion de la théorie des cordes. Corde qui est un 'fil' ou un ensemble de particules.

b) Concernant la minoration du $\sup \times \inf$, on a les exemples dans le livre d'Aubin (cas compact). Dans le cas plat, on utilise l'exemple de C.Chen-C.S.Lin dans Commun.Pure.Appl.math.1997, ici, $n \geq 3$ et aussi l'article de C.C.Chen et C.S.Lin de 1999, "Blowing-up...".

33) **Equation de la courbure scalaire prescrite (et du type Yamabe) en dimension 4 et champs de Yang-Mills** :

a) exemple : 1-si on note SW la variété hyperbolique sans bord et orientable de dimension 3, de Seifert-Weber, alors $SW \times S_1$ est une variété loc.conf.plate de courbure scalaire constante stric.negative de dimension 4, elle est lié aux champs de Yang-Mills. 2- En dimension 4, aussi on considere, la variété de Davis ou le produit de deux surfaces de courbure sectionelle non opposées et de courbure scalaire strc.negative (donc, non-loc-conf.plate $S_{-1} \times S_{-1}$ (elle est d'Einstein) avec S_{-1} une surface de courbure scalaire constante < 0), on obtient une variété Riemmannienne lié aux champs de Yang-Mills. On peut considerer sur ses variétés l'Equation de la courbure scalaire prescrite (dimension 4).

Dans le cas positif (pour l'equation de Yamabe et du type Yamabe), $S_2 \times S_2$, $S_3 \times S_1$.

b) En physique (description de la force nucléaire responsable de la cohesion des protons-neutrons dans le noyau) le cas le plus important est porté aux variétés de dimension 4 avec une metrique Riemannienne ou Lorentzienne.

c) Regarder l'article de, Andrzej Derdzinski, dont le titre est : "Riemannian manifolds with harmonic curvature", il y a la fonctionnelle de Yang-Mills et pour lui la derivée du tenseur de courbure donne les points critiques de la fonctionelle de Yang-Mills. En fait il s'agit de la variété, de la metrique et de la connection. C'est la courbure de Riemann qui est un champ de Yang-Mills.

d) Pour ce qui est des champs de Yang-Mills en dimension 4 et la théorie de Seiberg-Witten, apparait la fonctionelle de Yamabe et l'invariant de Yamabe et la courbure scalaire et les metriques conformes, dans des articles de M.Gursky par exemple en dimension 4 :

Si on prend une variété Riemannienne compacte sans bord (M^4, g), de dimension 4 avec champ de Yang-Mills, cela veut dire que le tenseur de Riemann, $Riem = F_\nabla$ est un champ de Yang-Mills. Comme la courbure scalaire S_g se déduit du tenseur de Riemann (elle est liée au tenseur de Riemann), alors, S_g est un objet de la physique et l'Equation de la courbure scalaire prescrite, en dimension 4, sur les variétés de Yang-Mills, est liée à la physique puisqu'elle contient S_g. De meme pour la metrique conforme, qui est liée à g, la metrique Riemannienne g est appelé en dimension 4 un instanton.

La théorie de Yang-Mills existe sur des variétés non-compactes ou completes. (non compact, or complete Manifolds with harmonic curvature). Voir Taubes et les articles de Gabor Etesi et Yawei Chu. Exemples : variétés d'Einstein (Einstein manifolds) $n \geq 3$ et les variétés loc.conf.plates de courbure scalaire constante (pour $n \geq 4$, en particulier pour $n = 4$) ou Ricci parallel, en particulier les variétés de courbure sectionelle constante.

Du point de vue de la physique, en dimension 4, on peut considerer les champs de Yang-Mills sur une variété compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs de Yang-Mills. On peut considerer au depart la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs de Yang-Mills. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, obsevation, à partir des données et du champs de Yang-Mills).

Comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la courbure scalaire prescrite V (elle est prescrite, pulsion ou signal ou potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" qui lie V à S_g, S_g est un "champ scalaire de Yang-Mills". L'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 et sur une variété de Yang-Mills de dimension 4 est un objet de la physique.

Aussi, c'est ecrit dans l'article de T.H. Parker (Gauge Theories on four dimensional Riemannian manifold, Comm.Math.Physics, 1982), si on considere un terme ("potentiel de Higgs") du type $P(u) = au^4 + mu^2$ avec $u > 0$ la solution et a, m deux fonctions réelles avec $m \leq 0$ possible, l'equation bosonique dans un champs de Yang-Mills devient du type Yamabe (ou de type courbure scalaire prescrite). ($\Delta_g u + (\frac{s_g}{6} + 2m)u = -4au^3$, $\Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$ et s_g la courbure scalaire). On conclut, voir l'article de T.H. Parker (dans un champ de Yang-Mills, l'equation bosonique, induit (avec le fait qu'on a un champ de Yang-Mills, les lagrangiens s'annulent et la dérivée par rapport à la connexion est nulle), que le résidu est nul et constitue une solution de couplage des champs).(le lagrangien Yang-Mills bosonique, $Y = B_1 + B_2$ avec B_1 la fonctionnelle de Yang-Mills et B_2 la lagrangien bosonique, la loi de la particule : $\dot{Y} = dY = 0 = dB_1 + dB_2 = 0$, si on se place dans un champ de Yang-Mills, alors, $dB_1 = 0$, ce qui implique que $dB_2 = 0$, si de plus, $u > 0$ est solution de l'equation bosonique (cela veut dire que $\frac{\partial B_2}{\partial u} = 0$), ceci implique que $\frac{\partial B_2}{\partial \nabla} = 0$ et le résidu est nul : $\Sigma < \nabla_j u | \rho(e_i) u >= 0$ et donc, les deux equations du systeme de couplage sont vérifiées. Donc l'equation bosonique (du type courbure prescrite) dans un champ de Yang-Mills suffit à determiner le systeme.Ces deux conditions, champs de Yang-Mills et equation bosonique constituent une solution particuliere du systeme.)

On peut aussi considerer chaque lagrangien seul dans n'importe quelle formulation, par exemple ici, celui de Yang-Mills seul et celui bosonique seul. Ici (dans l'article de Parker, T.H) on a le lagrangien de Yang-Mills bosonique.

34) **En dimension 2 : equation de Liouville :**

a) Equation de la courbure scalaire prescrite sur la sphere de dimension 2 (vortex equation) ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (vortex equation) ou surface de dimension 2 (vortex equation). Mean-Field-equation.

b)Voir les articles de Crandall-Rabinowitz, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, Chen-Li, pour la provenence de ses equations : Géometrie (courbure de Gauss), Gazs, combustion, astronomie et astrophysique.

c) En dimension 2, aussi, c'est un cas particulier des champs de Yang-Mills, la theorie de Glashow-Weinberg-Salam, modelise les interactions (faibles) electromagnetiques des particules. C'est la theorie de jauge (theorie de champs) avec un groupe de jauge (groupe de symetries locales) $U(1) \times SU(2)$

voir le livre de G. Tarantello Self-dual Gauge theories.

d) L'equation de Liouville ou de type Liouville apparait aussi dans le phénomène de "cordes cosmiques", un objet de l'univers "cosmic strings" et à ne pas confondre avec la theorie des cordes. Voir l'article de J. Spruck et Yisong Yang (cosmic strings).(On prend une metrique Lorentzienne $ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij} dx^i dx^j$, la metrique g_{ij} est definie sur une surface, M de dimension 2 et apres on peut choisir g_{ij} conforme a une autre metrique, par exemple $g_{ij} = e^u \delta_{ij}$ et on choisit le champ particulier). C'est là, par exemple l'idée générale.

e-En dimension 2 : c'est aussi, la theorie des champs de Liouville en dimension 2. Qui a été etudiée pour des surfaces à courbure négative et plus récemment sur la sphere de dimension 2. (LCFT, Liouville conformal field theory (2+1)).

De meme ici, du point de vue de la physique, de la chimie, astronomie ou la physique quantique, en dimension $n = 2$, on peut considerer des sources, des champs sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou une surface compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considerer au depart l'ouvert ou la surface et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, obsevation, à partir des données et du champs ou des parametres).

Ici aussi, comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la fonction V, (V est la source ou pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" ou emission, qui lie V à la donnée de départ, par exemple S_g (dans le cas d'un ouvert $S_g = 0$), S_g est un "champ scalaire". Il se peut que ce ne soit pas S_g comme pour l'operateur $\Delta + \epsilon(x_1\partial_1 + x_2\partial_2)$, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$.

//

35) **En dimension $n \geq 3$: Relativité générale ($n = 3$) et Cosmologie quantique ($n \geq 3$) :**

Cette idée de partir d'un espace Lorentzien $n + 1$ et de choisir une metrique conforme, sur la variété M, en partant de l'espace temps $M \times (0, \delta)$, se géneralise aux dimensions superieures. (Il y a la correspondance, ADS-CFT(Anti-de-Sitter, Conformal field theory) proposée par Juan Maldacena ($\Lambda < 0$, constante cosmologique strictement négative dans l'equation d'Einstein). Les equations d'Einstein classiques et quand la dimension $n \geq 3$ c'est la "quantum-cosmology qui correspond au cas $\Lambda = 0$, equation d'einstein du début, (1915)). On a $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ avec $g_{ij} = u^{4/(n-2)}g_0$, une metrique conforme a celle de départ g_0 sur M.

L'idée générale est la suivante : (On part de la formulation Lorentzienne $(n + 1), M \times (0, \delta)$, d'Einstein en relativité génerale et on introduit sur la variable espace des metriques conformes dans la fonctionelle du champ (ici au lieu de la fonctionelle du champ comme dans la théorie de Yang-Mills, on a l'equation d'Einstein), on a des champs particuliers liés au changement de metriques conformes, tout cela dans le but d'etudier les interactions des particules et des astres (gravitation dûe à la courbure de l'espace temps ou à la formulation en $n + 1$ et les ondes qui sont les effets de la gravitation ou des champs, en particulier gravitationnel, un autre champ est le champ T d'energie-impulsion, peut etre vu comme une donnée, l'interaction est ecrite dans l'equation d'Einstein ci-dessous, gravitation, $Ricci^\gamma, R^\gamma$, et les données ou un autre champ, est le tenseur T). C'est l'adpatation à $(n + 1)$ de la théorie d'Einstein, en relativité générale, qui est en $(3+1)$. L'espace Anti-de-Sitter est une solution particuliere des equations d'Einstein, comme l'espace de Minkowski ou la metrique de Schwazrchild, l'inconnu ici est un espace Lorentzien (V, γ) de metrique Lorentzienne γ, qui verifie l'equation d'Einstein $Ricci^\gamma - \frac{1}{2}R^\gamma\gamma = T$, avec $Ricci^\gamma, R^\gamma, T$ respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire et le tenseur d'Energie-impulsion. Dans certains cas, cela revient à resoudre ce qu'on appelle le probleme de Cauchy en relativité.par exemple $T = 0 \Rightarrow Ricci^\gamma = 0$. Un autre cas particulier, on en parlé ci-dessus, est de trouver des solutions du type $V = M \times (0, \delta)$ et $\gamma = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ avec $g = u^{4/(n-2)}g_0$. Resoudre les equations des contraintes pour (V, γ) particuliers avec la méthode conforme de Lichnerowicz. On prend $V = M \times (0, \delta)$ avec $\gamma = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$, on transfome les equations d'Einstein en 2 Equations des contraintes (Probleme de Cauchy, par les relations Gauss-Codazzi), puis on prend $g = u^{4/(n-2)}g_0$ sur M, on transforme les 2 equations des contraintes en un systeme de deux equations elliptiques. Einstein scalar field Lichnerowicz equations. Voir, Hebey, Pollack, Pacard, Choquet-Bruhat, Bartnik.)

Remarque : Pour ce qui est de la théorie de Yang-Mills, on s'interesse à une fonctionelle du champ, on peut se ramener à la dimension 2 et utiliser la methode conforme comme dans Spruck-Yisong (cosmic-strings) ou d'autres théories avec fonctionnelle de champs sur une variété Lorentzinne de dimension 4. ($ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij}dx^i dx^j$) (exemple, Glashow-Weinberg-Salam, combine fonctionnelle de Yang-Mills et theorie conforme en 2 dimensions). Ici dans ADS-CFT ($\Lambda < 0$ ou bien $\Lambda = 0$ et on retrouve les Equations d'Einstein classiques avec $n = 3$ pour la relativité génerale et $n \geq 3$ pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology"), on remplace la fonctionnlle par l'equation d'Einstein. De meme, ici, dans la relativité génerale ($n = 3$) et pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology" ($n \geq 3$), on remplace la fonctionnlle par l'equation d'Einstein.

a) il y a une application et réalisation en physique, en $(3 + 1)$ et $(4 + 1)$ et $(6 + 1)$ de la correspondance de ADS-CFT, de Juan.Maldacena (on voit bien le probleme du bon espace-temps). Et aussi $(2 + 1)$ (LCFT, Liouville conformal field theory).

La correspondance ADS-CFT correspond a l'equation d'Einstein avec une constante cosmologique $\Lambda < 0$ (Anti-de-Sitter) : $Ricci^\gamma - \frac{1}{2}R^\gamma g + \Lambda g = T = 0$. Si $\Lambda = 0$, on retrouve l'equation d'Einstein (1915) ecrite plus haut, et les théories en question sont : $n = 3$, la relativité générale et $n \geq 3$ la cosmologie quantique ou "quantum cosmology".

Il y a des auteurs qui font référence à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps avec $\Lambda < 0$. Dans la théorie classique d'Eisntein($\Lambda = 0$), c'est la "quantum cosmology", trouver le bon espace-temps pour $n \geq 3$.

b) Pour ce qui est des equations d'Einstein et methode conforme : ($n \geq 3$ ("quantum-cosmology") et $n = 3$ qui correspond à la théorie de la relativité générale :) Voir les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, dans general relativity and quantum cosmology. Cosmologie quantique pour $n \geq 3$. (il y a des auteurs qui font réference ̀la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps pour $n \geq 3$ avec $\Lambda < 0$. Ici, on a la théorie classique d'Einstein ($n = 3$ relativité générale et "quantum cosmology" pour $n \geq 3$ avec $\Lambda = 0$)).

(Equation d'Einstein classique : $\Lambda = 0$, (1915) cosmologie). Voir le monograph de : E.Hebey, D. Pollack, F. Pacard, Y. Choquet-Bruhat, R. Bartnik : dans la théorie des champs de Klein-Gordon massive le potentiel $V(\Psi) = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$. (les données $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$ peuvent etre choisies librement ainsi que la metrique g_0 de la variété Riemannienne).

Voir aussi les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, la variété Riemanninne (M, g_0) peut etre compacte sans bord ou non compacte. Voir la These de C.Valcu.
c) On part des equations de contraintes qui derivent des equations d'Einstein et qui sont obtenues par les equations de Gauss-Codazzi (on contracte le tenseur de Riemann dans les equations de Gauss-Codazzi pour avoir le tenseur de Ricci). On contracte le tenseur de Ricci pour faire apparaitre la courbure scalaire et on separe les termes en variables temporelles et spaciales. Puis on utilise une metrique conforme.
d) Inversement, dès qu'on a une solution des equations de contraintes avec champ scalaire, il existe une solution des equations d'Einstein, un espace-temps maximal unique avec une metrique Lorentzienne, d'apres Choquet-Bruhat et Choquet-Bruhat-Geroch. C'est ce qu'on appelle le formalisme de Choquet-Bruhat-Geroch-Lichnerowicz.(Il existe un espace temps (L, γ) maximal et unique à isometrie prés avec γ Lorentzienne, et un plongement $i : M \to L$, tel que $i^*(\gamma) = g$, (L, γ) 'prolonge' (M, g) et les autres parametres, comme le champ scalaire par exemple). Voir le print de B. Premoselli et l'article de A. Carlotto (The general relativistic constraints equations).

Pour chaque solution des equations des contraintes on a une solution des equation d'Einstein, on a une multitude d'univers ou plusieurs espace-temps. La multitude d'espace-temps, modelise aussi la multitude d'etats quantiques, en particulier c'est la combinaison entre la gravité et les differents champs dont le champ electromagnetique et d'autres champs : Yang-Mills, Klein-Gordon, fluides, etc. Cela veut dire que du point de vue mathematique on a plusieurs espace-temps alors que, du point de vue de la physique, il y a plusieurs etats quantiques ou plusieurs fonctions d'ondes a l'instant $t = 0$, dans le meme espace ou variété M avec des propriétés concernant les fonctions d'ondes ou etats quantiques (Plusieurs ondes au meme instant qui sont dans un espace commun, et, differents au meme temps). Ceci est un modele mathematique pour expliquer l'existence de plusieurs etats quantiques ou fonctions d'ondes, qui sont a la fois differents, dans plusieurs espaces differents, et dans un meme espace au meme temps : $(M, g_0, \psi, \sigma, \tau, \pi)$, modele de base commun a tous les espaces, qui est lui meme un 'univers' de 'parametres'. Phénomene physique $\leftrightarrow$ Propriété mathematique : i) Etat quantique $\leftrightarrow$ fonction d'onde $u > 0$, et, ii) extra-dimensions ou dimensions supplementaires $\leftrightarrow$ propriété des fonctions d'ondes : $\sup u = f(\inf u)$, (notion d'enroulement, de torsion), et les 2 valeurs $(\sup, \inf)$.

Dans un article de Choquet-Bruhat (1968), on ne peut pas avoir existence globale d'un espace temps car d'apres Penrose et Hawking, les Eq de la relativité d'Einstein developpent des singularités. Mais on a existence locale d'un espace temps $(-t_0, t_0) \times M, t_0 > 0$ et unicité locale et globale.

Théorie de la graviation quantique : du type Kaluza-Klein. La théorie de Kaluza-Klein c'est en $(4+1)$ comme espace-temps avec une dimension cachée. Les théories du 'type' Kaluza-Klein, c'est en $(5+1), (6+1), (n+1), n = 9, 10$ ou $(n+1), n \geq 3$ avec plusieurs dimensions cachées.

Pour ce qui est des solutions des Equations d'Einstein par la méthode conforme de Lichnerowicz-Choquet-Bruhat-York : on a :

i) Si on prend $\Psi = 0$, $\tau \equiv constante \neq 0$, $\sigma = \pi = 0$, alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'equation de Yamabe (dans "le cas négatif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

ii) Si on prend $\Psi \equiv constante \neq 0$, $\tau = 0$, $\sigma = \pi = 0$, alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'equation de Yamabe (dans "le cas positif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

iii) Si on prend $\Psi \not\equiv constante$, $\sigma = \pi = 0$ et $\tau = 0$ alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'equation du type courbure scalaire prescrite avec $h = S_{g_0} - |\nabla\psi|^2_{g_0} \leq S_{g_0}$ (dans "le cas positif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

On choisit W champ de vecteur de Killing conforme ($DW = 0$, conformal Killing vector field), pour avoir un champ conforme et etre compatible avec la théorie des champs conformes. Ici, on a pris $W = 0$ (pour dire qu'il y a au moins toujours une solution), mais on peut prendre $DW = 0$. on a une théorie des champs, gravitation+Klein-Gordon, ou Yang-Mills, ou Electromagnetique, et une théorie conforme des champs (on avait deja une metrique conforme introduite par la methode de Lichnerowicz-York-Choquet-Brhuat-Isenberg-Pollack, c'est le contexte conforme. Ici conforme pour dire que les objets sont invariants par transformations conformes, 'Scale invariants' ou 'Zoom invariants').

De meme ici, du point de vue de la physique, de l'astronomie ou de la cosmologie ou de la cosmologie quantique, en dimension $n = 3$ ou $n \geq 3$, on peut considerer les champs sur une variété compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considerer au depart la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, obsevation, à partir des données et du champs ou des parametres, comme $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$ et (M, g_0)).

Ici aussi, comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la fonction V (du type courbure scalaire prescrite) qui peut etre constante (Yamabe), (V est prescrite (ou Yamabe, $V \equiv constante$)), on peut prendre $V = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$, V est la pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" qui lie V à S_{g_0} ou $S_{g_0} - |\nabla\psi|^2_{g_0}$, S_{g_0} est un "champ scalaire".

//

36) **En dimension $n \geq 3$: résultat d'unicité et de rigidité : en Biologie Mathématique :**

Interpretation en Biologie Mathématique : la Chimiotaxie (Chemotaxis en anglais), est l'etude du mouvement de certaines cellules (les amibes, amoebae en anglais) dans leur environement, mouvement dû à la liberation de substances chimiques par les amibes. les amibes se deplacent vers les endroits ou la concentration de cette substance chimique est la plus grande et s'agregent, forment des agregats. L'interpretation biologique du resultat d'unicité est que les amibes ne peuvent pas former des agregats (ne se concentrent pas) quand on a une solution unique et constante au systeme de Keller-Segel. Voir l'article de Lin-Ni-Takagi. Le systeme de Keller-Segel peut se reduire à l'etude d'une seule equation, voir l'article de Lin-Ni-Takagi, Journal of Diff. Equations, 1988. Cette formulation existe sur les variétés compactes sans bord de dimension $n \geq 3$, voir T. Hillen et K.Painter.

Remarque 1 : Il y a aussi les D-branes en dimension 2, cordes ouvertes avec condition de Dirichlet.(fait reference a l'equation du type Liouville (equation de mouvement des particules ou de la corde) avec condition de Dirichlet). Pour la theorie conforme des champs de Liouville. Il y a aussi les D-branes en dimension $n \geq 3$, on a Kaluza-Klein avec conditions de Dirichlet.

Remarque 2 : En ce qui concerne l'existence de dimensions supplementaires (extra-dimensions) dans les théories du type Kaluza-Klein : ceci est lié a l'existence d'une nouvelle perticule qui est l'axion qui se deplace dans ces dimensions cachées, on peut les detecter ou savoir comment les eliminer avec des outils, des telescopes, voir les articles ou preprint de Horvat, Krcmar, Lakic. Il y a le telescope du CERN, et aussi d'autres appareils, pour essayer de detecter ou eliminer ces particules que sont les axions. C'est dit dans le print de Horvat, Krcmar, Lakic, les dimensions supplementaires $(5+1)$, $(6+1)$ sont liés a l'astrophysique, elles ont des réalisations. (4+1) c'est la formulation Kaluza-Klein initiale.

"Du type courbure scalaire prescrite"$\leftrightarrow$ Schrodinger=Dynamique d'une particule non relativiste.

"Du type Yamabe"$\leftrightarrow$ Schrodinger=Dynamique d'une particule non relativiste.

//

37) Des Remarques sur le tenseur metrique en polaires à l'ordre 2 :

Pour ce point voir l'expression du tenseur metrique en coordonnées géodesiques polaires. On le calcul pour des vecteurs de la sphere particuliers en utilisant des transformations orthogonales. La carte choisit sur la sphere est celle des coorodonnées spheriques sur la $(n-1)-$sphere :

Ici, on utilise la formule suivante qui donne le coefficient de la metrique d'ordre r^2 :

$$\frac{1}{3}R_{kpql}(y_i)\theta^p\theta^q\partial_i\theta^k\partial_j\theta^l.$$

On a : $\theta_1 = \cos\tilde{\theta}_1, \theta_2 = \sin\tilde{\theta}_1\cos\tilde{\theta}_2, ..., \theta_{n-1} = \sin\tilde{\theta}_1\sin\tilde{\theta}_2....\sin\tilde{\theta}_{n-1}\cos\tilde{\theta}_{n-1}, \theta_n = \sin\tilde{\theta}_1\sin\tilde{\theta}_2...\sin\tilde{\theta}_{n-2}\sin\tilde{\theta}_{n-1}$. le $(n-1)-$uplet est $(\pi/2, \pi/2, ..., \pi/2)$, le vecteur $e_n = (0, 0, ..., 1)$. Alors le terme d'ordre r^2 de la metrique est $R_{innj}(t_0)$, $t_0 = P_0 = x = y_i$.

On prend le $(n-1)-$uplet, $(\pi/2, \pi/2, ..., \pi/2)$.

Quand on remplace la composante i par celle de n et celle de n par celle de 1, on a $\tilde{g}_{11} = R_{niin}, 1 \leq i \leq n-1$ (et on sait que $R_{nnnn} = 0$). On avait un terme contenant R_{1nn1}.

Quand on conserve les composantes 1 et 2 et on remplace la composante i par celle de n, on a $\tilde{g}_{12} = R_{1ii2}, 3 \leq i \leq n$ et on sait que $R_{1112} = R_{1222} = 0$.

De meme, pour $\tilde{g}_{mm}$, on remplace la composante i par celle de n et celle de n par celle de m. on obtient $\tilde{g}_{mm} = R_{niin}$, pour $i \neq m$ et on avait un terme $= R_{mnnm}$, et on sait que $R_{mnnm} = R_{nmmn}$. Avec, $R_{nnnn} = 0$.

De meme, pour $\tilde{g}_{ij}$, on conserve les composantes, i et j et pour $k \neq i, j$, on remplace la composante k par celle de n. On a alors, $\tilde{g}_{ij} = R_{ikkj}$ pour $k \neq i, j$, mais on sait que $R_{iiij} = R_{ijjj} = 0$. On avait un terme contenant R_{innj}.

1) ce n'est pas vrai, que l'ordre soit forcément superieur a r^2, on ne sait rien de cela, dans le theoreme 1.53 du livre d'Aubin, on doit prendre $b > 0, a > 0$. Le tenseur metrique est de l'odre de r^2 et sa derivée est de l'ordre de r. Il n'y a plus rien a faire.

2) Si on suppose que $Ricci \neq 0$, il y a au moins un terme $Ricci_{ij} \neq 0$, cela veut dire qu'il y a au moins un terme de la courbure de Riemann $R_{ikkj} \neq 0$. Or on a vu par les transormations orthogonales qu'en se placant en un des vecteurs de base e_i, on a le terme d'ordre r^2 de la metrique est un $R_{ikkj} \neq 0$. Cela veut dire qu'on ne peut pas l'eliminer.

Donc, on ne peut pas ameliorer l'ordre de la derivée du tenseur metrique, sur une variété quelconque en particulier $Ricci \neq 0$. Sur une variété quelconque, on ne peut pas depasser l'odre r^2 dans la metrique en coordonnées geodesiques polaires. Il faut supposer au moins que $Ricci \equiv 0$. Mais dans le cas general ce n'est pas possible.

3) Pour arriver par un changement de metrique conforme a avoir $Ricci = 0$, voir le livre de Hebey, il faut avoir $Weyl = 0$ et resoudre une equation en utlisant les conditions de Frobinius, donc, il faut supposer une condition sur $Weyl$ ou supposer que $Weyl = 0$, ce qui veut dire que la variété est loc.conf.plate, ce qui ne sert a rien car on est dans le cas, non.loc.conf.plat.

4) Meme si on suppose par exemple tous les termes de la forme $R_{ikkj} = 0$, avec un double indice quelque part, ce qui implique que $Ricci = 0$, alors il y aura toujours un point ou on a un terme du type R_{ijkl}, comme le tenseur de Riemann est non nul ceci implique que la metrique a un terme d'ordre r^2. Par exemple avec $\tilde{\theta}_1 \neq 0, \pi/2$ et $\tilde{\theta}_2 = ... = \tilde{\theta}_{n-1} = \pi/2$, on conserve le terme R_{2n13}, en permutant les lignes, on conserve R_{2kl3}, comme les indices 2 et 3 sont quelconques, on a au moins un point avec R_{1234} ou plus géneralement R_{ijkl}.

En fait, on a soit R_{2n13} soit R_{21n3}(on a calculé g_{23}) et on regarde aussi R_{23n1} et $R_{2n31} = -R_{2n13}$ (on echange certaines lignes, et on calcul g_{23}), et on utlise l'identité de Bianchi.

5) Quand on considère l'equation de Yamabe, cela veut dire qu'on considere une courbure prescrite $\equiv 1$. Le gradient est nul dans toutes les directions. Cela veut dire que toutes les directions sont prises en compte ou bien aucune direction n'est previlégiée, la symetrie de la sphere. La technique utilisée dans la recherche d'estimation a priori est la technique moving-sphere, elle optimise la recherche d'estimations a priori et ne previligie aucune direction. Pour les dimensions $n = 3, n = 4, n = 5, n = 6$, l'ordre d'annulation du tenseur metrique en polaire, permet d'avoir l'estimation a priori, jusqu'a l'ordre r^2, a partir de cet ordre, il y a une direction previligiée, or ceci n'est pas possible car on a supposé qu'aucune direction n'est previligiée. Donc le cas limite

est $n = 6$, pour les dimensions superieures à 7, il faut supposer des hypothèses supplementaires. Pour le cas general, le cas limite est $n = 6$.

Pour le cas limite, $n = 6$, on a utilisé cette invariance par symetrie de la sphere, car les solutions tendent vers une fonction radiale.

Pour la dimension $n = 4$ et l'Eq. de la courbure prescrite ou du type courbure prescrite (presence d'un potentiel), on donne des conditions sur le potentiel (petit en norme Lipschitz, proche d'une constante et la constante > 0 est quelconque, petite ou grande, oscille autour d'une constante > 0), pour pouvoir appliquer cette methode moving-sphere en presence d'un potentiel (possibilté d'une direction prévilégiée).

6) Si, on regarde la théorie de Kaluza-Klein, ou des extra-dimensions, il faut que la propriété soit vraie pour toute variété, pour que la Probabilté que la formulation soit vraie, soit de 1. Ceci est possible en dimensions, $n = 3, n = 4, n = 5, n = 6$, ou bien les conditions supplementaires soit compatibles avec la théorie de Kaluza-Klein, par exemple, la compacité de la variété et operateur conforme coercif (ce qui est prouvé dans ce cas, par YY.Li-L.Zhang, par contre Choquet-Bruhat-York-Isenberg-Pollack ont considéré le cas ou la variété n'est pas necessairement compacte). Pour le cas géneral, le cas limite est $n = 6$.

-On a vu ci-dessus qu'il y avait une obstruction geometrique, de la courbure de Riemann (tenseur de Riemann) : "obstruction de la gravité" liée à la courbure, car la gravité est liée à la courbure ; obstruction d'astronomie, théorique.

-On a aussi des conditions astrophysiques, obstructions numeriques, obstructions astrophysiques, concretes, expérimentales, en, $5+1, 6+1$, voir l'article de, G.F. Giudice et J.D. Wells ; et le cas $4+1$ aussi ; Extra-dimensions, dans Review of Particle Physics, 2005-2006. Dans, Particle Data Group, nouvelle edition en 2021.

En ce qui nous concerne, la Théorie de Kaluza-Klein, c'est en $4+1, 5+1, 6+1$. Et le cas $3+1$, c'est la relativité génerale. On a bien le cas limite est $n = 6$.

Dans la Théorie des Supercordes c'est en $9 + 1 = 10$ dimensions spatio-temporelles et les dimensions supplementaires forment un espace a 6 dimensions du type Aubin-Calabi-Yau.

Chaque Théorie explique des phénomènes de la physique, d'astronomie, d'astrophysique (comme le disent Horvat, Krcmar, Lakic, voir leur prints sur les axions et les extra-dimensions) ou(et) les interactions des particules.

//

38) Sur, $\sup u_i \leq f(\inf u_i)$, en dimension 4 pour l'Eq. de courbure scalaire prescrite ou du type courbure scalaire prescrite en dimension 4.

On a une sorte de "compacité" dans l'espace des solutions (u, V) avec $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et ∇V petit, V proche d'une constante : La propriété est vraie pour tout ensemble denombrable de solutions avec V proche d'une constante. Si, on prend un "ensemble continu" de solutions, on peut en extraire une suite pour la quelle $\sup u_i \leq f(\inf u_i)$. Si $(u_t)_{(t\in I)}$ est un ensemble de solutions relativement à $(V_t)_{(t\in I)}$ proche d'une constante, alors "on peut avoir pour un sous ensemble denombrable" $J \approx \mathbb{N}, J \subset I$, J dénombrable, avec V proche d'une constante, $\sup u_i \leq c_J(\inf u_i)$, $i \in J$. Dans l'ensemble des solutions (u, V), pour une suite denombrable de solutions J, $\sup u_i \leq c_J(\inf u_i)$, c'est une sorte de compacité de la propriété $P_{\{\sup,\inf\}} = \{\sup u \leq c(\inf u)\}$, dans l'ensemble des solutions : (u, V) avec V proche d'une constante. Ceci est coherent avec la notion d'estimation a priori, car on a la compacité apres extraction de sous-suite d'un ensemble donné.

-Le dénombrable et les ondes : dualité onde-corpuscule. Pour les ondes on a un flot continu d'emissions, alors que pour les corpuscules on a un nombre dénombrable d'emissions distinctes. Les deux interpretations de la matière sont possibles en physique, donc, il suffit d'avoir la propriété pour un nombre dénombrable ou une suite. Ce qui est le cas en dimension 4, pour l'Eq. de la courbure scalaire prescrite et l'Eq. du type courbure scalaire prescrite avec un potentiel proche d'une constante > 0. On a encore les notions d'enroulement, de torsion (et extra-dimensions) et les valeurs $(\sup, \inf)$, en dénombrable.

-Le continu et minorant-majorant. Dans le cas du continu, emissions continues, on utilise l'estimation a priori, qui, à partir du minorant $m_0 > 0$ donne le majorant $M_0 = c(m_0) = c(a, b, m_0, K, M)$ et cette fonction est décroissante de $m_0 > 0$, donc, quand on prend $m_0 > 0$ petit et voisin de 0, $0 < m_0 \to 0$, $c(m_0)$ croit, $m_0 \searrow 0 \Rightarrow c(m_0) \nearrow$, on voit alors l'amplitude générée par la variation du minorant $m_0 > 0$, ainsi que l'enroulement et la torsion et les valeurs, $(majorant, minorant) = (M_0, m_0)$, $M_0 = c(m_0)$, (et extra-dimensions). Avec ici, $u > 0$ solution relativement à $V > 0$ proche d'une constante, dans le cas continu. On a une "inégalité de Harnack" implicite entre minorant et majorant dans le cas continu : il existe une relation entre le minorant et le majorant, notée $c = c(m_0) = M_0$, décroissante, avec l'inégalité suivante $0 < m_0 \leq M_0 = c(m_0) < +\infty$:

$$0 < m_0 \leq \inf_M u \leq \sup_K u \leq M_0 = c(m_0) < +\infty.$$

//

Sur les relations $\sup$, $\inf$**, explicites et implicites :**

Relation explicite (il y a plus d'informations : notions d'enroulement+ de torsion). Relation implicite (il y a moins d'informations : notion d'enroulement). (On l'a deja dit dans la partie relativité generale et cosmologie quantique, notion d'enroulement et de torsion et les valeurs $(\sup, \inf)$).

a) **Relation explicite** entre $\sup$ et $\inf$: $\sup$ et $\inf$ liés. Enroulement+Torsion. Type liaison : $\sup \updownarrow \inf$, ou $\sup \leftrightarrow \inf$. Type de torsion en une fonction : $x \to \frac{1}{x^t}, t > 0$.

a1) Relation explicite. $\sup$ et $\inf$ se controlent mutuellement. Stabilité. Stabilté des vibrations : en $\sup$ et $\inf$. Premier type de stabilité : stabilité en normes essentielles, entre $\sup$ et $\inf$. Deuxieme type de stabilité : en norme $L^p_{loc}, p > N-1, N = \frac{2n}{n-2}$, stabilité en norme $W^{1,1+\epsilon}_{loc}$, pour ces normes, il y a un "tunnel" dans lequel, les ondes, leurs vibrations, leurs oscillations, sont stables, avec le fait que le $\sup$ et $\inf$ peuvent avoir de grandes amplitudes, mais restent confinées ou leur p-volume reste borné, stable, maitrisable : stabilité des vibrations.

a2) **relation ouverte** entre $\sup$ et $\inf$: de $\sup$ vers $\inf$ et de $\inf$ vers $\sup$, $\sup \leftrightarrow \inf$

a3) $\sup$ controle $\inf$ et $\inf$ controle $\sup$. Intervalles de precisions de nombres pour $\sup$ et pour $\inf$.

a4) Bornes uniformes pour les normes, $L^p_{loc}, p > N-1, N = \frac{2n}{n-2}$ et $W^{1,1+\epsilon}_{loc}$.

a5) estimations a priori explicites : $\sup \leq c < +\infty$ si $\inf \geq m > 0$ et $\inf \leq c < +\infty$ si $\sup \geq M_0$. On peut quantifier explictement c en fonction de m ou M_0.

b) **Relation implicite** entre $\sup$ et $\inf$: $\sup$ et $\inf$ liés. Enroulement. Type liaison : $\sup \uparrow \inf$ ou $\sup \leftarrow \inf$.

b1) Relation implicite. $\sup$ est controlé par $\inf$. Dans un sens seulement. Stabilté dans un sens, du $\inf$ vers $\sup$.

b2) **relation semi-ouverte** entre $\sup$ et $\inf$: de $\inf$ vers $\sup$, $\sup \leftarrow \inf$

b3) $\inf$ controle $\sup$. Pas necessairement d'intervalles de precisions de nombres pour $\sup$ et pour $\inf$.

b4) estimation a priori implicite : $\sup \leq c < +\infty$ si $\inf \geq m > 0$, ca va dans un sens.

//

39) Sur l'estimation asymptotique de l'article de D.Holcman : on ecrit : $l_\epsilon = \epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon$, on sépere l'integrale en deux, la partie sur $B_P(\delta)$ et celle sur $M - B_P(\delta)$, puis on fait une changement de variable $u = \epsilon r$ dans $B_P(\delta)$:

1)

$$\epsilon^{-(n/2)+1}(\mu_\epsilon)^{N-1} = \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} =$$

$$= \int_0^{\delta/\epsilon} r^{n-1} \left|\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}} - \frac{\epsilon^{n-2}}{(\epsilon^2+\delta^2)^{(n-2)/2}} - \epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon\right|^{4/(n-2)} \times \left(\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}} - \frac{\epsilon^{n-2}}{(\epsilon^2+\delta^2)^{(n-2)/2}} - \epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon\right)$$

$$\leq C + O(\delta^2)\frac{l_\epsilon^{N-2}}{\epsilon^2} + O(\delta^n)\frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} + O(\delta^n)\frac{l_\epsilon}{\epsilon^{n-4}}$$

Avec $C > 0$, on a développé l'inégalité précedente et on a utilisé :$|x+y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha, \alpha = \frac{4}{n-2} \leq 1$ $(n \geq 6)$. Si, $l_\epsilon \to +\infty$, on multiplie par $\epsilon^n > 0$ on divise par l_ϵ^{N-1} puis on fait tendre ϵ vers 0, on obtient $0 < C' \leq 0$ c'est pas possible. Donc $l_\epsilon \to k \geq 0, k < +\infty$, on multiplie l'inégalité precedente par ϵ^n et on fait tendre ϵ vers 0, on obtient $l_\epsilon \to 0$ quand $\epsilon \to 0$.

2) $l_\epsilon \to 0 \Rightarrow \exists r_\epsilon \to +\infty$ tel que :

$$\frac{1}{(1+r_\epsilon^2)^{(n-2)/2}} = l_\epsilon = \epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon,$$

2-1) Si $0 < r_\epsilon < \frac{\delta}{\epsilon}$: $0 \leq r \leq r_\epsilon \Rightarrow (r^2+1)^{-(n-2)/2} \geq (r_\epsilon^2+1)^{-(n-2)/2}$ et $r \geq r_\epsilon \Rightarrow (r^2+1)^{-(n-2)/2} \leq (r_\epsilon^2+1)^{-(n-2)/2} = \epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon$, apres on utilise le theoreme de convergence dominée de Lebesgue :

$$\epsilon^{-(n/2)+1}(\mu_\epsilon)^{N-1} = \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} =$$

$$= \int_0^{r_\epsilon} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+2)/2}}(1+O(\frac{\epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon}{\frac{1}{(1+r_\epsilon^2)^{(n-2)}}})) + \int_{r_\epsilon}^{\delta/\epsilon} r^{n-1}(3(\epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon)^{N-1}) =$$

$$= C + O(\delta^n)\frac{(\epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon)^{N-1}}{\epsilon^n} = C + O(\delta^n)\epsilon^{-(n-2)/2}\mu_\epsilon^{N-1}$$

avec $C > 0$. Donc,

$$\mu_\epsilon \equiv \epsilon^{(n-2)^2/2(n+2)},$$

2-2) Si, $r_\epsilon \geq \frac{\delta}{\epsilon}$, on utilise le meme type de calcul que dans le, 2-1) et le Theoreme de convergence dominée de Lebesgue :

$$\epsilon^{-(n/2)+1}(\mu_\epsilon)^{N-1} = \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} =$$

$$= \int_0^{\delta/\epsilon} r^{n-1}(\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}}+...)^{N-2}(\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}}+...) = \int_0^{\delta/\epsilon} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+2)/2}}(1+O(\frac{\epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon}{\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)}}})) \to C > 0,$$

avec, $r \leq \frac{\delta}{\epsilon} \leq r_\epsilon \Rightarrow \epsilon^{(n-2)/2}\mu_\epsilon = (1+r_\epsilon^2)^{-(n-2)/2} \leq (1+r^2)^{-(n-2)/2}$. Donc,

$$\mu_\epsilon \equiv \epsilon^{(n-2)^2/2(n+2)}.$$

//

40) D-Branes, cordes, supercordes, Yamabe, courbure scalaire, Kaluza-Klein :

Sur les D-Branes, c'est des cordes avec condition de Dirichlet au bord. C'est construit comme pour Kaluza-Klein, $(n+1)$. D'apres Bennequin, dans Astérisque, Seminaire Bourbaki, 2003, voir aussi, Collion-Vaugon, pour la fibration. On prend la variété totale, W en $(n+1)$ de la forme $W = X \times M$, avec M une variété de Kahler-Einstein ou Aubin-Calabi-Yau, K_6 de dimension complexe 3 et réelle 6. Donc, Ricci plate donc scalaire plate. Et, X l'espace temps de dimension 4 de la forme $(3+1)$, $X = Y \times \mathbb{R}$ avec Y de courbure scalaire ≥ 0 et du au théorème de la masse positive, la courbure scalaire est quelque part > 0, car la courbure agit et courbe l'espace (aussi, mesures experiementales sur l'existence d'ondes gravitationnelles, donc, $Weyl \neq 0$ ici en dimension 3 pour l'espace Y le tenseur de Cotton non nul quelque part, se rappeler aussi que la courbure scalaire est liée à la courbure ou l'inverse du rayon de courbure et la masse est > 0) et de masse $m > 0$, voir le monographe de Jonathan.Rosenberg et David.Wraith, sur le fait que la courbure scalaire est > 0 quelque part et est ≥ 0 (Titre : Positive Scalar curvature). Comme le formalisme des D-branes, est aussi lié à la reduction de Kaluza-Klein, on a l'equation de Yamabe ou de type courbure scalaire prescrite avec condtions de Dirichlet au bord, comme $S_g \geq 0$ et $S_g > 0$ quelque part, on voit qu'on est dans le cas d'un operateur coercif pour les D-branes avec formalisme ou reduction de Kaluza-Klein, car on a $Y \times M$ et $S_g = Scalaire_Y + Scalaire_M = Scalaire_Y + 0 = Scalaire_Y \geq 0$ et > 0 quelque part. L'invariant de Yamabe est > 0 ou operateur conforme coercif.(on peut prendre aussi, $M = K_6 = T_6$ le tore de dimension 6, Einstein-Kahler).

Voir aussi le print de, Mariana Grana et Hagen Triendl, Saclay. Kaluza-Klein mechanism and d-branes. Titre : String Theory compactifications.(ils disent que le monde ou espace est un brane, $Y \times M$, c'est censé etre une variété à bord.).

Voir aussi l'article de Schoen-Yau sur le th. de masse positive, ils disent que la variété de dimension 3 est sans bord ou avec bord, avec une metrique complete, $\mathbb{R}^n$ n'est ni avec bord ni sans bord, car "son bord" est ∞, un point, mais cela ne peut pas ete un bord, car une variété à bord, son bord est une variété sans bord de dimension 2. On peut considerer par exemple la boule unité diffeomorphe à $\mathbb{R}^3$ avec l'application $x \mapsto x/(1-||x||)$, ou bien sans bord avec une variété proche de la sphere de dimension 3, ou une déformation de la sphere de dimension 3.(par la projection stereographique, on en leve un point, le pole nord et l'hemisphere sud, et on applique la projc.steorographique de pole, le pole nord, c'est un bout, par exemple). Comme Schoen-Yau disent que la variété est soit sans bord ou avec bord, mais avec des coordonnées asymptotiques dans les bouts, avec une metrique asymptotique qui la rend complete, et ici, c'est censé etre un brane, avoir une membrane, ou un bord. On est dans le cas avec bord dans le théorème de la masse positve, mais on a toujours, la courbure scalaire ≥ 0 et > 0 quelque part.

Pour l'Eq. de Yamabe, on a un potentiel constant > 0 et l'operateur est l'operateur conforme, $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta + S_g$, $\Delta = -\nabla^i \nabla_i$, l'operateur conforme est coercif. mais quand le potentiel varie, l'operateur devient $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta + h$ avec $h = S_g - |\nabla \Psi|^2 \leq S_g$. Ce nouvel operateur reste encore coercif, car du point de vue de la physique, l'impulsion est proche d'une constante et diminue progressivement, un observateur exterieur, regarde l'effet de l'impulsion a l'instant t où elle est maximale et au voisnage de l'impulsion maximale, c'est à dire voisine d'une constante. C'est à dire $\Psi(x_0) + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ petit. Il y a une impulsion à l'instant t, qui est constante et apres on regarde au voisinage de $a = \Psi(x_0) = constante$ à instant t .

Ceci confirme et explique ce qu'on a dit au point (37), sur Kaluza-Klein classique en presence d'un potentiel en dimension $n = 4$ ou plus généralement $n \neq 4$. Du point de vue de la physique, un observateur exterieur regarde ce qui se passe pour une impulsion à l'instant t et au voisinage de l'impulsion. Oscillation autour d'une constante. Il y a impulsion, observateur, puis le potentiel diminue de $\epsilon > 0$ petit. Quand on met un potentiel, un observateur exterieur regarde ce qui se passe autour d'une impulsion, c'est à dire autour d'une constante.

Remarque : Ceci est une interpretation assez intuitive (les espaces sont **independants les uns des autres**, mais forment des espaces-temps dont la restriction a la variété voulue ou cherchée, est Riemannienne). Concernant la formulation en $(n+1)$, on ecrit : $W = M \times X = M \times (Y \times \mathbb{R})$ et par Jonathan. Rosenberg et David. Wraith (titre : positive scalar curvature), on a $X = Y \times \mathbb{R}$ est un espace temps tel que la metrique Lorentzienne sur X est Riemannienne sur Y ou sa restriction. Puis on regroupe M et Y en un produit, car les espaces sont independants l'un de l'autre. Donc, on obtient un espace temps total W tel qu'on ait une metrique produit sur $M \times Y$, ainsi, les courbures scalaires s'additionnent et donnent une courbure scalaire totale, $S_g \geq 0$ et > 0 quelque part par la contribution de la courbure scalaire de Y, donnée par le th. de la masse positive.

Cas 1 : Y compacte sans bord, alors la variété Riemannienne $M \times Y$ est compacte sans bord. Ici les cordes sont fermées.

Cas 2 : Y compacte à bord, alors la variété Riemannienne $M \times Y$ est compacte à bord. Ici les cordes sont ouvertes. avec condition de Dirichlet. C'est le cas traité dans ce point.

//

41) Sur le cas négatif de l'Eq. de courbure scalaire (et sous-critique) (solutions positives) et supercritique negatif (pour ce cas les solutions peuvent changer de signe) : Ici on prouve la compacité locale sans conditions sur la courbure ou la variété Riemannienne. Les estimations a priori locales dans le cas négatif ne dependent pas de la courbure ou de la nature de la variété Riemannienne. Il n'y a pas de conditions sur la courbure, on a des estimations du type Keller-Osserman. Dans l'article de Marco Rigoli : il a supposé la variété complete et a imposé une condition sur la courbure de Ricci, pour obtenir des estimations asymptotiques a l'infini du type Keller-Osserman, à la distance à un point : $|u| \leq C/[d(x,x_0)]^\tau, \tau > 0$, par principe du maximum et des raisonnement du type theoremes de comparaisons, ici la notation $|u|$ signifie qu'ils majorent et ils minorent les solutions, d'autres estimations sont données pas L.Véron et M.F.Bidaut-Véron, pour d'autres types d'equations ou systemes. Estimations asymptotiques aussi pour la complétude. Aussi, l'article de L.Véron, 1992, Journal d'Analyse Mathematique, ici, sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ et operateur "strongly elliptic" pour se ramener au laplacien dans $\mathbb{R}^n$, operateur non en divergence forme.

Il y a aussi l'article de Aviles-McOwen, Journ.Diff.Geometry.1988.(Examen de DEA). Ici, ils considerent le potentiel constant $K \equiv -1$ sur une variété complete et considerent une suite exhaustive de compacts.

Il y a aussi l'article de Ratto.Rigoli.Véron. Math Zeitschrift. 1997. Ils prennent le cas ou la courbure prescrite $0 > K \in C^{\infty}(M)$ **fixée** et sur une **variété complète** M non-compacte et disent qu'ils s'inspirent de la méthode de Aviles-McOwen, donc aussi avec une suite exhaustive de compacts.

A aucun moment ces auteurs, ne posent le probleme de l'estimation a priori et de compacité locale(ne dependant que des parmetres exterieurs, a, b, A, M, B, g, avec B le compact), avec ou sans conditions sur la courbure(courbure de Ricci, de Riemann...) ou la variété Riemannienne (localement conformément plate ou non, complète, à bord, sans bord...). On a aussi, des estimations du type Keller-Osserman : pour toute carte normale en y_0, $\sup_{B_R(y_0)} uo\varphi^{-1} \leq \frac{c}{R^{2/(q-2)}}$ par un la technique "blow-up" ou eclatement, on sépare les constantes, une estimation a priori du type inégalité de Harnack (dans l'inégalité de Harnack, il y a majoration par l'integrale, ici, il n'y en a pas, c'est une estimation a priori du type inegalité de Harnack sans condition sur l'integrale. Autre chose, la constante c depend du point, car on est sur une variété, ca depend du point, alors que sur $\mathbb{R}^n$, en tout point on a une carte normale et c'est invariant par translation, ce qui fait que les constantes ne dependant pas du point, l'inegalité de Harnack usuelle ne depend pas du point, ceci est lié au fait que l'espace est plat partout, c'est une hypothese forte, en tout point la carte est normale, c'est l'identité. Mais la constante de l'inegalité de Harnack depend du rayon. La technique blow-up qu'on a utilisé fait que c et R sont séprées, la constante totale est plus explicite $C = \frac{c}{R^{2/(q-2)}}$, on explicite la dependance en R de C, et aussi en c de C. Et l'estimation a priori est vraie pour tout point $y_0 \in M$ et toute carte normale, il y a l'influence de la géometrie, ce qui etait sous-entendu dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout y_0 et toute carte normale, on a l'estimation a priori au voisinage de y_0 c'est a dire qu'a l'interieur d'un voisinage de y_0 ca ne depend pas du point $y \in V_{y_0}$, cela suffit comme estimation a priori, ca depend d'un rayon maximal R du point y_0 et la forme explicite de C fait que c'est une estimation a priori du type Harnack, comme on l'a dit ci-dessus, uniforme en $y \in V_{y_0}$, comme si on etait dans le cas plat, localement uniforme avec dependance du type Harnack en R rayon maximal). Non seulement on a l'estimation locale globale dans une boule $B(y_0, R)$, mais aussi, dans toute petite boule $B_{R'}(y)$ de $V_{y_0} = B(y_0, R)$:

$$\sup_{B_{R'}(y)} u_i o\varphi^{-1} \leq \frac{c}{R'^{2/(q-2)}}, \qquad (**)$$

avec $c = c(y_0, a, b, A, \alpha, M, g)$, c'est une estimation a priori du type Harnack. On peut l'ecrire aussi pour la distance geodesique en comparant les boules pour les metriques $g, \varphi^*(g) = h$. ici, on a melangé boules de cartes, euclidiennes et boules geoedesiques, mais on a toujours l'estimation a priori du type Harnack :

a) Pour un point $y \in V_{y_0} = B(y_0, R)$ et un réel $R' > 0$ donnés : on a l'estimation a priori globale par rapport à un rayon maximal $R > 0$ lié à y_0. Estimation par rapport à un rayon maximal $R > 0$ lié au point y_0. A la Bonnesen, du type inégalité de Bonnesen, par rapport à un rayon maximal.

b) Soit par soucis d'homogénéité, l'inégalité $(**)$ qui exprime comment les solutions u_i evoluent en fonction de y et $R' > 0$ uniformément dans $V_{y_0} = B(y_0, R)$, ici $R > 0$ est lié au point y_0, alors que y et $R' > 0$ sont pris de maniere quelconque dans $V_{y_0} = B(y_0, R)$. On a la formule $(**)$ vraie pour tout y et $R' > 0$ dans $V_{y_0} = B(y_0, R)$. Estimation qui peut etre interieure et spherique. Par soucis d'homogénéité, pour y et R', on veut voir comment evoluent les solutions u_i en fonctions de y et R' : il n'y a pas de dependance en y, mais ca depend d'un rayon maximal qui est lié à y_0, un autre point. $(**)$ permet d'exprimer l'evolution de u_i en fonction de R', on considere une boule $B_{R'}(y)$ et on regarde comment evoluent u_i en fonction des parametres de cette boule, donc, en fonction de y et R', ca ne depend par de y dans V_{y_0} mais ca depend de R'. On a, $y_0 \leftrightarrow R$ et $y \leftrightarrow R'$.

c) Ces assertions sont equivalentes, l'estimation a priori locale globale dans $V_{y_0} = B(y_0, R)$ est equivalente à l'estimation a priori du type Harnack :

$$\sup_{B(y_0,R)} u_i o\varphi^{-1} \leq \frac{c}{R^{2/(q-2)}} \Leftrightarrow \sup_{B_{R'}(y)} u_i o\varphi^{-1} \leq \frac{c}{R'^{2/(q-2)}},$$

avec, $B_{R'}(y) \subset B(y_0, R), \forall R' \leq R, \forall y \in B(y_0, R)$.

Dans le cas super-critique negatif, on a comme consequence, un principe d'Harnack. On a un critère de compacité si la variété est compacte sans bord et $\int_M R < 0$ avec R la fonction de l'Eq. $\Delta u + R = Ve^u, \Delta = -\nabla^i \nabla_i, a \leq V \leq b < 0$.

Pour ce qui nous concerne, la compacité locale ne necessite pas de conditions sur la courbure ou la variété Riemannienne. Les **estimations a priori locales**, **compacité locale**, dans le cas négatif, ne necessitent pas de conditions sur la courbure ou sur la variété Riemannienne.

(Ce qui suit, a été dit dans l'introduction du print "Cas d'existence de solutions d'EDP", quand on a parlé l'elimination des blow-up isolés simples par le th. de la masse positive. Mais cela reste vrai dans le cas strictement négatif, sans th.de la masse positive. On l'a dit, compacité : resultat d'existence par le degré topologique et par consequent l'estimation a priori. Voir aussi pour les solutions variationnelles dans le livre d'Aubin chapitre 6, cas strictement négatif.)

1) Consequence pour le cas strictement negatif avec potentiel negatif strictement et sur une variété compacte sans bord : ($\Delta = -\nabla^i \nabla_i$, c_n la constante de l'operateur conforme, on se ramene a la courbure scalaire $S = -1$) :

On a une solution topologique pour $c_n \Delta u - u = V u^{N-1}, u > 0, -\infty < a \leq V \leq b < 0, ||V||_{C^{\alpha+\epsilon}} \leq A, \epsilon > 0$. Pour cela on considere l'homotopie d'operateurs compact : $K_t(u) = (c_n \Delta + 1)^{-1}(V_t u^{N-1} + 2u)$, avec $V_t = -(1-t) + tV, t \in [0,1]$. On a la compacité, implique qu'on peut considerer le degré de Leray-Schauder dans $X = \{u \in C^{2,\alpha}(M), u \geq 0, ||u||_{C^{2,\alpha}} \leq 2c_0\}$, de sorte que $(Id - K_t)(u) = 0$ n'a pas de solution u dans ∂X, on peut alors considerer le degré de Leray-Schauder dans X. Par homotopie :

$$deg(Id - K_1, X, 0) = deg(Id - K_0, X, 0),$$

Or, $f = Id - K_0$ a une derivée qui est un isomorphisme, car dans le cas negatif, la seul solution de $(Id - K_0)(u) = 0$ est $u = u_0 \equiv 1$ (l'eq. est : $c_n \Delta u - u = -u^{N-1}$, soit on utlise le resultat d'unicité dans le livre d'Aubin, Kadzdan-Warner, chapitre 6, soit, se placer au maximum et au minimum on a a la fois $u \leq 1$ et $u \geq 1$, voir le livre d'Aubin, pour l'unicité dans le cas négatif, chapitre 6). Et en $u_0 = 1$, $f'(h) = f'(u_0)(h), u_0 = 1$, est un isomorphisme $f'(h) = h - (c_n \Delta + 1)^{-1}(-(N-3)h)$ et en appliqant $c_n \Delta + 1$ le noyau est reduit a 0 et f' est surjectif. Car l'operateur $c_n \Delta + (N-2)$ est inversible. Donc le degré de f est l'index de $f' = I - \tilde{K}_0$, $\tilde{K}_0$ compact et f' est un isomorphisme et est egal à $+1$ ou -1, voir l'article de Leray-Schauder, 1934, titre : Topologie et équations fonctionnelles, Annales de l'E.N.S, voir aussi l'article resumé de Jean Mawhin, donc le degré est non nul. Donc : le degré de $Id - K_1$ est non nul ce qui veut dire que l'eq. $c_n \Delta u - u = V u^{N-1}, u > 0$, a une solution topologique, et on a l'estimation a priori.

Si on divise l'eq. par $u > 0$ et on integre, on obient que l'integrale de u^{N-2} est uniformement minorée par une constante > 0 et par le principe du maximum les solutions sont alors unifromément minorées par une constante > 0, on utilise la compacité et la convergence vers une fonction non identiquement nulle, puis le principe du maximum implique qu'elle est > 0. On pouvait prendre l'ensemble $X = \{u \in C^{2,\alpha}(M), u \geq \frac{c_0'}{2} > 0, ||u||_{C^{2,\alpha}} \leq 2c_0\}$, c'est cet ensemble qu'il faut prendre.

Ici, on n'a pas utilisé l'idée du livre d'Aubin, dans le cas compact, se placer au maximum et au minimum, pour majorer et minorer les solutions, c'est une methode differente.

2) Pour le cas super critique et negatif, sur une variété compacte sans bord, on a la meme chose avec l'eq. $\Delta u - 1 = Ve^u, u \geq 0$. Ici on a imposé un signe, mais le fait que la variété soit compacte, implique que les solutions sont minorées, en se placant au point minimum, Q, $\Delta u(Q) \leq 0$. Ici aussi on peut se passer de cette idée du livre d'Aubin : en effet, on utilise la majoration uniforme des solutions, on resout un probleme de Dirichlet, w, car $Ve^u + 1$ est uniformement bornée (On se place dans des ouverts de cartes de bords réguliers $(U_x, \varphi_x), x \in M$ et $w = w_x$, onse ramene a $\mathbb{R}^n$)et on soustrait w, $u - w$, on se ramene a des fonctions harmoniques, puis on utilise le principe de Harnack. Donc, soit u converge, soit, elle tend vers $-\infty$, or l'intergrale de u est uniformement minorée par une constante > 0, ce qui n'est pas possible.(on est sur une variété compacte sans bord, on integre l'eq de u). Donc, les u sont uniformément minorées.

L'application $K_t(u) = (\Delta + 1)^{-1}(V_t e^u + 1 + u)$ et $X = \{u \in C^{2,\alpha}(M), u \geq \frac{k_0'}{2}, ||u||_{C^{2,\alpha}} \leq 2k_0\}$. Avec, $V_t = -(1-t) + tV$ et $-\infty < a \leq V \leq b < 0$ et $||V||_{C^{\alpha+\epsilon}} \leq A, \epsilon > 0$. Avec, $g(u) = K_0(u) = (\Delta + 1)^{-1}(-e^u + 1 + u)$ et $g'_{u_0=0}(h) \equiv 0$, donc, $(Id - g)'_{u_0=0}(h) = h = Id$.

Remarques : a) En ce qui concerne l'unicité pour l'eq. $\Delta u - 1 = -e^u$ sur une variété compacte. On veut prouver que $u \equiv 0$. Alors on ecrit $\Delta u = (1 - e^u)$, on multiplie par u et on integre, on obtient : on a toujours $(1 - e^u)u \leq 0$:

$$0 \leq \int_M |\nabla u|^2 = \int_M (1 - e^u)u \leq 0.$$

Donc : $u(1 - e^u) \equiv 0$, donc, $u \equiv 0$.

b) On a la meme chose avec l'eq. $c_n \Delta u - u = -u^{N-1}, u > 0$, on deplace u au second memebre et on multiplie par $u - 1$ et on integre, on obtient un terme positif ou nul egal a un terme negatif ou nul, donc, nul et donc, $u \equiv 1$.

$$c_n \Delta u = u(1 - u^{N-2}),$$

on multiplie par $u - 1$ (on a toujours $u(1 - u^{N-2})(u - 1) \leq 0$) et on integre :

$$0 \leq c_n \int_M |\nabla u|^2 = \int_M u(1 - u^{N-2})(u - 1) \leq 0.$$

Donc, $u(1 - u^{N-2})(u - 1) = 0$, d'ou, $u \equiv 1$.

c) Tout ceci pour ne pas utiliser l'idée du livre d'Aubin : se placer au minimum et au maximum des solutions. Dans le cas d'un potentiel, on a l'unicité aussi, par la technique du point a) et b).

//

42) Sur l'article de Brezis-Merle et le probleme 1 de Brezis-Merle. Dans leur introduction Brezis-Merle commencent par se poser le problemes des estimations a priori. ($p = +\infty$)

a) Ils trouvent une condition sur les bornes C_1 et C_2 pour avoir la compacité jusqu'au bord. Ici, les potentiels peuvent changer de signe et C_1 et C_2 sont quelqconques, mais $C_1 \cdot C_2 < 4\pi$, c'est une condition sur la "masse" ou l'invariant conforme qui est la masse. C'est une condition à la Bol ou à la Fiala ou à la Alexandrov pour les inégalités isopérimetriques.

C'est une condition "masse-niveau d'energie" comme pour les inégalités isoperimetriques. Et sur un invariant conforme. Pour avoir la compacité globale.

b) Comme Brezis-Merle ont restreint le champ des possibilités pour C_1 et C_2. Ils ont trouvé une condition sur le potentiel V pour qu'il n'y ait pas de conditions sur C_1 et C_2 et l'invariant conforme $C_1 \cdot C_2$. Cette condition est la positivité de V. Ils obtiennent la compacité locale. Mais la compacité globale n'est pas vraie, comme le montre leur exemple et contre-exemple de la fin de l'article.

C'est un exemple d'existence de solutions d'un probleme aux limites avec condtions de Dirichlet, avec les conditions de Brezis-Merle qui illustre bien la compacité locale et met en defaut la compacité globale. Ces exemples existent pour toute masse $m = 4\pi A, A > 1$.

Masse ou invariant conforme, conditions sur V (et ou C_1) et niveau d'energie ou masse. (Pour ce qui est de l'inégalité isoperimetrique de Bol, Fiala, Alexandrov).

c) Donc, pour le probleme 1 de Brezis-Merle, se pose la question de la compacité globale, jusqu'au bord. Pour cela, il faut des conditions :

c1) Soit une condition sur C_1 et C_2 ? Comme la positivté de V pour la compacité locale, qui est une sorte de condition sur la borne inferieure de V, comme pour les inégalités, $\sup, \inf$.

Ou comme pour les espaces uniformément convexes. Des valeurs explicites pour caracteriser un ensemble.

c2) Soit une condition sur la masse $C_1 \cdot C_2$? Comme pour les inégalités isoperimetriques de Bol, Fiala, Alexandrov. Ou Comme pour les espaces uniformément convexes, des valeurs explicites pour caracteriser un ensemble. Ou les conditions sur l'invariant de Yamabe de Aubin en dimensions ≥ 3.

Brezis-Merle dans leur exemple et contre-exemple insistent sur le fait que la masse $m = 4\pi A, A > 1$ est arbitraire.

c3) Soit une condition sur V ? C'est en partie le probleme 1 de Brezis-Merle, les potentiels convergent en norme $C^0(\bar{\Omega})$ ou comme dans la remarque qui le precede, des conditions fortes sur V.

c4)Soit une condition sur les solutions u ? comme pour les theoremes dans les L^p, Lebesgue, Beppo-Levi, Fatou, ou d'Ascoli-Arzela ou Dunford-Pettis, ou les inégalités $\sup, \inf$.

d) Chen-Li, donnent une reponse a ce probleme (le probleme 1 de Brezsi-Merle) en imposant à V d'etre C^1 uniformément. On voit alors qu'a partir de la difference $|V(x) - V(y)| \leq A|x-y|$, on a au moins, aussi, la condition sur $C_1 \leq A \cdot diamtre(\Omega)$. Ici, on a trois conditions, V, C^1, uniformément, et sur C_1. Et ils obtiennent la compacité globale pour toute valeur de la masse, $m = C_1 \cdot C_2 > 0$ quelconque. Independemment de la masse.

On a aussi, les articles de, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, cas sous critique et Suzuki, cas V constant et Ma-Wei, cas V constant. Compacité globale par la méthode moving-plane.

e) Pour ce qui nous concerne, dans *"About Brezis-Merle Problem with Holderian condition"*. On fixe la regulrité de V, $s-$holderienne, $\frac{1}{2} < s < 1$ et on a une condition sur la masse ou l'invariant conforme, C_1 et C_2 sont quelconques, mais $C_1 \cdot C_2 < 24\pi$, borne explicite de 24π. Condition du type inégalité isoperimetrique de Bol, Fiala, Alexandrov, ou de Brezis-Merle pour des potentiels changeant de signe.

f) Maintenant, si on veut eliminer cette condition sur la masse ou l'invariant conforme. Il faut une condition sur le potentiel V. C'est l'objet de l'article : *"A Compactness result for an equation with Holderian condition"*. On prend $V = W \cdot (1 + |x|^{2\beta}), \beta \in (0, 1/2)$ avec W, Lipschitz et uniformément. Presence d'un poids et ce poids est holderien et Sobolev. On obtient la compacité pour une masse $m = C_1 \cdot C_2$ quelconque.

Cette condition du point f) est suffisante, car le poids engendre un cone holderien. Par exemple, si on prend V une fonction holderienne totale, elle verifie ; $|V(x) - V(y)| \leq B|x-y|^{2\beta}, \beta \in (0, 1/2)$, si $0 \in \partial\Omega$ est sur le bord, on ecrit $|V(x) - V(0)| \leq B|x|^{2\beta}$, c'est a dire que $V(0) - B|x|^{2\beta} \leq V(x) \leq V(0) + B|x|^{2\beta}$, on voit alors que V est equivalente au poids $1 + k|x|^{2\beta}$ au voisinage de 0. Donc, il suffit de prendre directement le poids, pour avoir une bonne approximation d'une fonction holderienne.

Le poids $(1 + k|x|^{2\beta})$, force W a etre holderienne dans un cone centré en 0.

Dans la pratique, par la methode des differences finies et des elements finis, on considere, des approximations, un maillage, il suffit de considerer les solutions en des points, pour cela il suffit d'avoir un porduit fini de poids en un nombre fini de points, qui peut etre grand. Ceci est possible et c'est une approximation. $V = W \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 + a_i|x - x_i|^{2\beta}), a_i = \pm\epsilon_i, 1 >> \epsilon_i > 0, \epsilon_i > 0$ petit, W Lipschitz et uniforme. Avec k tres grand si possible.

Ceci concerne le probleme 1 de Brezis-Merle avec un produit de poids. On a une approximation par un produit de poids holderiens d'une fonction holderienne. Approximation des fonctions et des solutions en considerant un nombre fini de points du maillage.

g) Maintenant, si on s'interesse au volume et une borne uniforme du volume lorsqu'on a un produit de k poids holderiens. On se place sur un domaine analytique et on utilise les idées (en partie) du print *"Uniform bound for the volume of the solutions to Liouville type equations on the annulus"*. $0 < a \leq W \leq b$ et W, C^1 uniformément, $||\nabla W|| \leq A$.

On ne se place pas forcément sur une couronne, mais sur un domaine analytique. Alors, pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe une tranformation conforme f_x d'un voisinage de x sur la demi boule unité. Alors, avant de faire agir la transormation conforme autour d'un point x_i du poids holderien, on utlise l'estimation locale par la méthode moving-plane de Chen-Li et on se retrouve (en partie)dans la situation du print *"Uniform bound ... on the annulus"*. Tout est borné en dehors de la singularité, sauf en la singularité. Alors on utlise la tranformation conforme f_{x_i}, le bord contenant la singularité devient plat et on se retrouve (en partie) comme dans le print *"Uniform bound...on the annulus"*. On utlise la formule de Pohozaev avec le poids, $1 + a_i|x - x_i|^{2\beta}$, on obtient : termes de bords $= O(1) + 0 =$ l'invariant conforme a un facteur prés dû à f_{x_i} et on obtient en prenant le rayon du demi-disque assez petit que le volume est alors borné par une constante dependant de $a, A, \beta, f_{x_i}, \Omega$, qui sont fixées au depart.

Comme pour le probleme de Brezis-Merle avec k poids holderiens, ou Lipschitziens, dans la pratique, par la methode des differences finies et elements finis, il suffit de considerer k grand, on a une approximation du volume et des fonctions et des solutions.

La compacité au voisiange du bord de Chen-Li est obtenue par la méthode moving-plane. Elle est locale (au voisiange de chaque pint du bord sous certaines conditions), il faut supposer le potentiel ou la courbure prescrite, V, C^1.

//

43) Pour revenir aux supercordes, dans l'article de 2006 dans Bulletin des Sciences Mathematiques, on a ecrit pour un point interieur x_0, $x_0 \in M$:

$$u_i(x_0) \geq m > 0 \Rightarrow \sup_M u_i \times \inf_K u_i \geq c = c(a, b, m, x_0, K, M, g) > 0,$$

Si on prend par exemple $x_0 \equiv K$ le compact K, on peut ecrire (on a la meme preuve, car on fixe x_0 et le compact K) :

$$\sup_K u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_M u_i \times \inf_K u_i \geq c,$$

On remplace $m = \sup_K u$, on obtient l'inégalité de Harnack "enroulement-torsion", suivante :

$$\sup_M u \times \inf_K u \geq c(a, b, \sup_K u, K, M, g) > 0,$$

la fonction $m \to c$ est croissante de $m > 0$. (dans le cas de dépendance linéaire, on a l'inegalité de Harnack classique d'un coté).

On a la fois l'enroulement et la torsion et c'est une inégalité "harmonique-Yamabe", car elle met en relation $\inf_K u$ et $\sup_K u$ pour ce qui est harmonique, et $\sup \times \inf$ pour ce qui est Yamabe. ici, relation entre $\sup_M u, \sup_K u, \inf_K u$. ou dans le sens $\sup_M u, \inf_K u, \sup_K u$. On a les relations suivnates : ouverte+semi-ouverte : $\sup_M u \leftrightarrow \inf_K u \leftarrow \sup_K u$. Ou si, on place tout ce qui est inf d'un coté et tout ce qui sup de l'autre :

$$\inf_K u \geq \frac{c(a, b, \sup_K u, K, M, g)}{\sup_M u} = C(a, b, \sup_K u, \sup_M u, K, M, g) > 0,$$

ou Formelement, on ecrit :

$$\inf \geq c(\sup) > 0,$$

ou si on revient a l'ecriture initiale,

$$\sup_M u \times \inf_K u \geq c(a, b, \sup_K u, K, M, g) > 0.$$

On voit alors pour ce qui est $n+1$ avec $n \geq 3$ (et en particulier $n = 9$), concernant les supercordes et Kaluza-Klein, l'enroulement, la torsion, qui sont mélangés, et, harmonique-Yamabe, les differentes relations d'Harnack mélangées et ceci sans nécessairement avec conditions au bord, Dirichlet ou Neumann ou mixtes.

Remarques : quelques exemples

1) Pour les fonctions solutions d'edp du type :

$$Lu = f,$$

On a des inégalités de Harnack avec une contibution de la norme L^n de f :

$$\sup_K u \leq C_1 \inf_K u + C_2 ||f||_n,$$

Si $f = V u^{N-1}$, on voit qu'on doit avoir une contibution de $||u||_p, p = nN$, dans l'inégalité de Harnack. Pour des equations plus generales que les fonctions harmoniques (presence d'un f), il faut une information ou une contirbution de f, si de plus on suppose f dependant de u alors, dans l'inégalité de Harnack classique il faut une contribution d'une integrale de u. Voir le Gilbarg-Trudinger pour les inégalités de Harnack classiques avec une fonction f.

On explique ainsi l'inegalité de Harnack a trois parametres, ci-dessus, avec, $\sup_M u, \inf_K u, \sup_K u$. La presence de 3 parametres.

2) Dans le Gilbarg-Trudinger, il y a l'inégalité d'oscillation, dans la solution de, De Giorgi et Nash, de régularité holderienne. Le lemme d'oscillation : il fait apparaitre $\sup_{B_R} u, \inf_{B_R} u$ et $\sup_{B_{R_0}} |u|$, avec R_0 fixé plus grand ou egal que R. Voir livre de Gilbarg-Trudinger, les chapitres.8 et 9 et en particulier le theroreme.15.7.

On explique que dans l'inégalité de Harnack a 3 parametres, ci-dessus, on prend M plus grand que K avec presence de $\sup_K u$, $\inf_K u$ et $\sup_M u$. 3 parametres dont deux d'Harnack harmonique et deux de Yamabe.

3) on explique la presence de 3 parametres dans l'inegalité de Harnack harmonique-Yamabe, qui est du a la non linearité de l'equation.

4) Il y a l'exemple suivant :

$$u_\mu(x) = \frac{\mu^{(n-2)/2}}{(\mu^2+|x|^2)^{(n-2)/2}},$$

a) quand $\mu \to +\infty$, on a l'inegalité $\sup_{B_k(0)} u_\mu \leq c \inf_{B_k(0)} u_\mu$, $c>0$,

b) quand $\mu \to 0$, on a l'inégalité $\sup_{B_1(0)} u_\mu \times \inf_{B_k(0)} u_\mu \geq c > 0$,

L'inégalité ci-dessus, melange ce type d'inégalités de Harnack. Fraction et produit.

Formelement, on ecrit :

$$\inf \geq c(\sup) > 0,$$

ou si on revient a l'ecriture initiale,

$$\sup_M u \times \inf_K u \geq c(a, b, \sup_K u, K, M, g) > 0.$$

On voit alors l'enroulement et la torsion en ce qui concerne les supercordes. On a alors les 2 relations suivantes à la fois : $\leftarrow$ et $\updownarrow$, en une relation. Comme ces deux relations sont melangées, on a alors l'enroulement dans la torsion.

On a :

$$(1) \qquad \sup_K u \times \inf_M u \leq c, \text{ ou, } \sup_M u \times \inf_K u \geq c > 0 : \; inegalites\, tres\, fortes,$$

$$(2) \qquad (\sup_K u)^\alpha \times \inf_M u \leq c, \text{ ou, } (\sup_M u)^{1/\alpha} \times \inf_K u \geq c > 0 : \; inegalites\, fortes,$$

$$(3) \qquad \sup_K u \leq c(\inf_M u), \text{ ou }, \inf_K u \geq c(\sup_M u) > 0 : \; inegalites\, faibles,$$

$$(4) \qquad \sup_M u \times \inf_K u \geq c(\sup_K u) > 0 : \; inegalites\, tres\, faibles.$$

a) Pour le (3) et (4), pour le (3), le sup controle l'inf. Pour le (4) le sup local controle l'$\inf \times \sup$, l'inf doit etre difficile a controler. Donc, (4) est plus faible que (3) qui est plus faible que (2) qui est plus faible que (1).

L'inégalité (4) est une inégalité tres faible, on voit bien l'enroulement dans la torsion, mélange d'enroulement et de torsion.

On l'a dit précédemment, à l'origine, Kaluza-Klein c'est en $4+1$ puis le model à evolué et on considere $5+1$, $6+1$, puis il y a d'autres formulations en $9+1$. L'operateur en question est $c_n\Delta + \tilde{h}$, c_n une constante universelle, celle de l'Eq de Yamabe, il est censé etre coercif. On peut ne pas avoir de bord, cas d'une variété compacte sans bord, ou bien, on peut avoir un bord. Ceci est lié au Th. de la masse positive, qui implique la coercivité de l'operateur et la presence ou non de bord. Puis,l'Eq. du modele est : $c_n\Delta u + \tilde{h}u = Vu^{N-1}, h = S_g - |\nabla\Psi|, V = \frac{1}{2}m\Psi^2, N = \frac{2n}{n-2}$, avec S_g, la courbure scalaire. Dans le cas $\Psi \equiv constante$, on retrouve l'Eq. de Yamabe. On pose par exemple, pour etre coherent avec les Eq qu'on a considéré : $h = \frac{\tilde{h}}{c_n}$. Sur la variété Riemannienne (M, g), qui peut etre un produit, comme on l'a dit, sur le Th. de la masse positive.

b) On a :

$$(1) : 1 - Torsion - Enroulement,$$

$$(2) : \alpha - Torsion - Enroulement,$$

$$(3) : Enroulement,$$

$$(4) : Enroulement - Torsion,\; enroulement\, dans\, la\, torsion$$

//

L'inégalité (4), enroulement dans la torsion, on a 3 parametres, peut etre vu comme liant 2 parametres, le (sup local) et l'(inf local $\times$ sup global). Le sup global est une barriere qui permet l'oscillation entre le sup local et l'inf local. L'inégalité (4) est une inégalité tres faible, car le sup local controle l'inf $\times$ sup, l'inf doit etre difficile a controler.

Si on a une idée sur l'inf local et le sup global, il est possible d'avoir une idée sur le sup local qui est intermediaire. Inégalité (4) : inégalité à 2 parametres indirecte. Intervalle de precisions de nombres.

Inégalité (4) : comme la fonction $m \to c(m), m > 0$ est croissante de $m > 0$ et que $\sup_K u \geq u(z) > 0, z \in K$, le point intermediaire peut etre z, si $C_{x,y}$ est une corde qui passe par z(si $z \notin K$, on agrandit K), on ecrit : $\sup_M u \times \inf_K u \geq c(\sup_K u) \geq c(u(z)) > 0$, on voit alors que le point z est un point intermediaire et que $u(z)$ est une valeur intermediaire entre $\inf_K u$ et $\sup_M u$. Le $\sup_K u$ est alors, une valeur moyenne dans l'ensemble des valeures intermediaires.

L'inégalité (4) est une inégalité à 2 parametres indirecte entre $\inf_K u$ et $\sup_M u$. La valeur $\sup_K u$ est une valeur moyenne parmi les valeurs intermediaires. La fonction $m \to c(m), m > 0$ mesure la dilatation de la corde. On a bien une **inégalité à 2 parametres indirecte ou dilatée**.(**Dilatation** de la corde $C_{x,y}$ en z $\forall z$ et si on prend les poids $\inf_K u$ et $\sup_M u$, on a dilatation de la corde $C_{x \in \inf_K u, y \in \sup_M u}$, de poids $\sup_K u$ et **amplitutde de la dilatation :** $c(\sup_K u)$). Ce phénomene de dilatation ne se voit dans le cas d'une variété compacte sans bord, car la dilatation possede une borne inferieure, une limite ainsi que l'amplitude de la dilatation.

L'inégalité (4) : **inégalité à 2 parametres indirecte ou dilatée** ; avec amplitutde variable.

Dans un travail récent, si on suppose les D-branes, conditions de Dirichlet, on a l'inégalité (3), moins tordue, qui met en relation 2 parametres directement : inégalité à 2 parametres directe.

44) les Equations, apparition et provenence : voir, Aubin,T. Lions, P-L. Rabinowitz, P-H.

a) Equation de Yamabe : precisement elle s'appelle Eq de Yamabe. En Géometrie et Physique et Astronomie. Kaluza-Klein, cordes, supercordes et D-branes, en dimension 4, Yang-Mills. **Dynamique relativiste**., energie, volume, potentiel...convexité(minoré ou cas positif courbure scalaire prescrite positive+majoré, par exemple Eq.Yamabe dim 4,5,6), concavité (majoré, ou cas négatif, ou courbure scalaire prescrite negative+majoré)...

b) Equation de la courbure scalaire prescrite : on peut la nommer "Eq de Schrodinger particuliere". En Géometrie et en Physique, en dimension 4, Yang-Mills., energie, volume, potentiel...convexité(minoré ou cas positif courbure scalaire positive prescrite+majoré, Par exemple, Eq. dim 4, courbure prescrite), concavité (majoré)...

c) Equation de type courbure scalaire, comme on en a parlé. En cosmologie, Astronomie, Kaluza-Klein, cordes, supercordes, D-branes. En dimension 4, Yang-Mills., energie, potentiel...

d) Equation de Lane-Emden-Fowler : $\Delta u = V(x)u^p; u > 0, p > 1$, en astronomie.

e) Equation de Schrodinger :(stationnaire : du type Yamabe ; du type courbure scalaire prescrite) : $\Delta u + b(x)u = f(x,u), u > 0$ avec f avec des combinaisons de termes avec exposant critique et sous-critique, $n \geq 3$, par exemple, $f(x,u) = V(x)u^{N-1} + W(x)u^\alpha, 1 < \alpha < N - 1 = \frac{n+2}{n-2}$. En physique, en optique non-linéaire (du type Yamabe), **Eq de Schrodinger : dynamique d'une particule non relativiste**. Energie, potentiel...

f) Eq de Liouville ou du type Liouville (courbure de Gauss) : En Géometrie et Physique et Chimie et Astronomie. Gaz, Cordes, D-branes, en dimension 2., energie, volume, potentiel...convexité(minoré ou cas positif courbure prescrite+majoré), concavité(majoré)...

Par exemple : Du point de vue de la géometrie, par exemple, Dans le cas positif : courbure scalaire prescrite positive, notion de convexité, et aussi le fait suivant : $\sup < +\infty$ si $\inf > 0$: cela veut dire que si la variété est uniformement convexe alors elle loc. uniformement concave...

//

45) Sur l'article de C.C.Chen. C.S.Lin. Communications on pure and applied math, 1997. Ils supposent les potentiels V, C^1 :

Ceci est du au fait suivant : Ils cherchent a avoir comme donnée, dans la convergence des fonctions blow-up, $R_i^{n-2}||v_i - U||_{C^2(B_{2R_i}(0))} \to 0$. En faisant le rescaling, ou changement d'echelle, $x = R_i y$, $y \in B_3(0)$, il suffit et il faut que, la difference, $w_i(y) = v_i(R_i y) - U(R_i y)$ tend vers 0 et appliquer les estimations de Schauder, aux fonctions, w_i, $\Delta(w_i - U) \to 0$, or, $-\Delta(w_i - U) = R_i^2 (V_i(y_i + R_i y) - V_i(y_i))(v_i)^{N-1} + ... \to 0$. C'est a dire qu'il faut que

$R_i^2(V_i(y_i+R_iy)-V_i(y_i))\to 0$, or cette difference n'est que la derivée de V_i au point blow-up : $\frac{V_i(y_i+h)-V_i(y_i)}{h}$ avec $h=\frac{1}{R_i^2}$. Donc, il faut que V_i soit derivable en y_i et $V_i'(y_i)=0$ et par le theoreme des accroissement fini, $V_i'(c_h)\to 0$ avec $0<c_h<h=\frac{1}{R_i^2}$ et la derivée en 0 doit etre continue. Donc, V_i doit etre C^1 en y_i, comme le point y_i est quelconque, il faut que V_i et sa limite V soient C^1. Il faut que pour toute suite (V_i) convergeant dans C^α vers V, il faut que V soit C^1, pour que ceci soit possible, il faut que $\alpha=1$, il faut que (V_i) soient C^1 et convergent dans C^1 vers V, C^1. Donc, il faut que (V_i) soient C^1 et convergent vers $V\in C^1$ dans C^1.

a) On a la condition de depart pour les V_i.(Par exemple : $1+a_i|x|^\alpha\to 1, a_i\to 0$).

b) On a la condition : pour toute suite V_i dans C^α qui converge dans C^α vers V, V doit etre C^1.

Pour que ce soit possible il faut que $\alpha=1$, V_i soit C^1 et converge dans C^1 vers V. On a alors V est C^1.

//

46) **Volume=Energie en dimension 2. Eq. de la courbure scalaire prescrite :** Sur le volume et energie en dimension 2 : dans le cas d'une surface riemennienne compacte sans bord, lorsque le potentiel est entre 2 nombres strict.positifs, on utlise la formule de Gauss-Bonnet. Lorsqu'on se place sur un domaine à bord (surface à bord particuliere), avec potentiel Lispchitzien(+poids Holderien ou domaine etoilé, par exemple dans l'article "A compactness result for an equation with Holderian condition") ou potentiel C1(+poids Holderien ou Lipschitzien) et avec des poids holderiens, on a la borne uniforme du volume=energie sans utliser la formule de Gauss-Bonnet.

Avec condition de Dirichlet. la condition de Dirichlet est aussi une deuxieme contrainte.

Volume global ou total=Energie globale ou totale.

//

47) **Volume local=Energie locale en dimension 4. Eq. de la courbure scalaire prescrite, cas plat :** En ce qui concerne l'eq. en dimension 4, $-\Delta u=Vu^3, u>0, \Delta=\nabla^i(\nabla_i)$ sur un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^4$. On a une condition sur u_i : $u_i\geq k(a)\cdot A_i, k(a)=\dfrac{8e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}>0$, A_i la constante de Lipschitz de $V=V_i$, pour avoir l'estimation optimale $\sup_K u_i\times\inf_\Omega u_i\leq c$, en particulier le volume=energie est localement uniformement borné. Brezis-Merle, donnent le meme type de conditions pour borner localement le volume=energie en dimension 2 et en deduisent la compacité locale.

Pour la dimension 4 (ce fait est illustré par l'exemple suivant), il y a l'exemple usuel de volume localement borné sans compacité locale : $n=4, u_\mu(x)=\frac{\mu}{\mu^2+|x|^2}, x\in B_1(0), \mu\to 0$.

a) Lorsque $A_i\to 0$: volume local=energie locale borné(e).

b) Lorsque $A_i\to A>0$: compacité locale.

En dimension 2, on avait une condition de Dirichlet qui etait aussi une deuxieme contrainte. Ici, en dimension 4, on a une deuxieme contrainte qui permet d'avoir la borne uniforme locale du volume=energie. Brezis-Merle aussi, imposent une deuxieme contrainte pour majorer localement le volume=energie, et obtiennent la compacité locale.

Volume local=Energie locale.

//

48)**Energie et volume. Eq. du type Liouville. en dimension 2 avec condition de Dirichlet. :** il s'agit de l'Eq. $-\Delta u+\epsilon(x\cdot\nabla u)=Ve^u$ avec condition de Dirichlet. $\Delta=\partial_{11}+\partial_{22}, 0\leq\epsilon\leq 1$, domaine etoilé par rapport à l'origine. On a une deuxieme contrainte, qui est la condition de Dirichlet.

//

49) **Energie locale. Eq. de Schrodinger :** En ce qui concerne l'eq. de Schrodinger $-\Delta u=Vu^{N-1}+Wu^\alpha, u>0, n\geq 3, \frac{n}{n-2}\leq\alpha<N=\frac{2n}{n-2}$ ou l'Eq. de Schrodinger sur les variétés, $-\Delta u-\lambda u=n(n-2)u^{N-1}, n\geq 3, N=\frac{2n}{n-2}$. $\Delta=\nabla^i(\nabla_i)$. On a les inégalités optimales; $\sup_K u\times\inf_\Omega u\leq c$ et $\sup_K u\times\inf_M u\leq c$. On en déduit la borne uniforme locale des energies.

Eq. de Schrodinger : dynamique d'une particule non relativiste.

Energie locale.

//

Dans le cas des variétés compactes sans bord, dans le cas positif, une deuxieme contrainte est l'absence de bord. On a alors la compacité globale. Ce fait se produit aussi dans le cas negatif, supercritique (pour l'equation $-\Delta u + R = Ve^u, R < 0, V < 0, \Delta = \nabla^i(\nabla_i)$).

//

50)**Sur l'article de Korevaar-Mazzeo-Pacard-Schoen :**

Concerant la proposition avec l'inégalité $u(x) \leq d(x, \Lambda)^{(2-n)/2} \inf_{\partial B(0,3/4)} u$.

Ce n'est pas correct. Ils ont ecrit n'importe quoi.

1)(/////) Le "blow-up" est mal ecrit : il n'est pas explicité correctement. Ici, ils ont ecrit n'importe quoi.

2)(/////) Ils n'expliquent pas le processus du commencement "moving-plane".

la phrase "strating with t_1 very positive, and continuing as far as possible" veut dire qu'il existe un $\lambda >> 1$ tres grand, puis on decroit les valeur de λ, jusqu'a ce que le processus se termine. Ca va dans le sens decroissant et non croissant.

Mais ce n'est pas ce qu'il faut dire : il faut dire d'abord, qu'il existe un rang ν qui enclenche le processus "moving-plane".

Le cas de la dimension 2 et le cas de la dimension $n \geq 3$ ont des preuves differentes. Ils ne disent pas comment faire et ils ne parlent meme pas de rang.

3)(/////) Ils n'expliquent pas le $t_1 = \sup\{\lambda...\}$ de la technique "moving-plane".

Ils ecrivent : $\inf v(t_i, \theta) < \sup v(t, \theta), t > -2 - t_i, t_i = -\log \frac{\lambda^{-1}}{16}$. Premierement ce n'est pas correct, et ici, ils prennent le sup egal à -1, qui dit que le sup est egal a -1. Puis parlent de theoreme de la moyenne, qui n'a rien a avoir ici avec ce qui est voulu.

4)(/////) Ils ne disent pas s'ils considerent une metrique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_{n-1}$, en fait ils en parlent au debut de l'article avec "cylindrical metric", mais n'exliquent pas comment on utlise le principe du maximum et le lemme de Hopf.

5)(/////) Ils ne disent pas comment appliquer le principe du maximum :

5a)(///) Ils ne disent pas si, il faut considerer une variété Riemannienne $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_{n-1}$ avec le lemme de Hopf où il faut considerer la derivée normale, donc un produit scalaire, donc une metrique Riemannienne, comme c'est ecrit dans le livre d'Aubin (en ce qui concerne le principe du maximum et le lemme de Hopf sur les variétés à bord).

5b)(///) Ils ne disent pas s'il faut un procédé local.

6)(/////) Ils n'expliquent pas les points 39), 40) et 41) de l'article de Brezis-Li-Shafrir.

//

2. QUELQUES PROBLEMES :

Concernant les inégalités de Harnack :

Fixant un minorant $m > 0$, on a une relation entre $\sup_K v$ et m pour toute $v > 0$ relativement a un W avec des conditions a priori sur W, v et W sont liés par une equation ou plusieurs equations. Or, en prenant le minorant $m = \inf_M u > 0$, on a l'inegalité pour $v > 0$ or $u > 0$ est déja une solution du probleme, donc $\sup_K u$ est fonction de $\inf_M u$ et des autres paramètres.

Pour l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimensions 3 et 4 :

a) En dimension 3, on a la dependance explicite du sup en fonction du inf,

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c.$$

b) En dimension 4, on a une estimation a priori. On plus on a des exemples pour ce cas.

En general, dans le cas d'une variété Riemannienne M de dimension 4, on a une estimation a priori. on peut se ramener a une estimation du sup en fonction du inf en ecrivant :

$$\sup_K u \leq c(a, b, \inf_M u, K, \Omega),$$

pour toute $u > 0$ solution de l'equation de la courbure prescrite en dimension 4 sur M, relativement a V (Lipschitzienne) verifiant :

$$||\nabla V||_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u,$$

et,

$$0 < a \leq V \leq b < +\infty,$$

En effet, $u > 0$ et V sont liés par l'equation, on peut supposer que le gradient de V et $\inf_M u$ sont aussi liés, ici on a deux equations liant $u > 0$ et V, une contrainte de plus. On a des exemples quand $||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$ et $\inf_M u_i \geq m > 0$, on a une estimation locale uniforme.

Ici, la constante $k(a) = \dfrac{32e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$ entre $\min_M u$ et la norme du gradient est plus grande que dans le cas plat(ouvert de $\mathbb{R}^4$). Il faut faire la preuve pour $\min_M u \geq m > 0$, car on doit eliminer des termes en $o(1)$. Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^4$, la constante $k(a) = \dfrac{8e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$. [1]

Remarque : Dans lecas d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^4$, la deuxieme contrainte est "vérifiée" (aprés blow-up), dans l'article de C.C.Chen et C.S.Lin, si on suppose $V \in C^2$ uniformément. Ils obtiennent une inegalité entre $\nabla V(y_i)$ et $[u_i(y_i)]^{-1}$, dans ce cas ils obtiennent l'inégalité optimale $\sup \times \inf$. (les points y_i sont les points blow-up).

i) Un exemple, ce resultat s'applique lorsque $V \equiv constante > 0$. On retrouve le résultat de YY.Li et L. Zhang, eux obtiennent l'inégalité optimale $\sup \times \inf$.

ii) Un autre cas, on l'a dit ci-dessus, c'est celui où $||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$ et $\min_M u_i \geq m > 0$, on obtient une estimation locale uniforme.

iii) On a un résultat analogue a celui de Brezis-Merle en dimension 2, en dimension 4 : pour deux suites $(u_i), (V_i)$ solutions de l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, $0 < a \leq V_i \leq b$ et $||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$, alors $u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), m, K, M)$. En particulier, si on prend $m = \inf_M u_i > 0$, on a l'inégalité de Harnack implicite, $\sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), \inf_M u_i, K, M)$ (La fonction $m \to c$ est decroissante de $m > 0$ et change en une autre fonction $\tilde{c}$ si on remplace les suites (u_i, V_i) par une d'autres suites (v_i, W_i) avec des hypothèses similaires, et on obtient : $\sup_K v_i \leq \tilde{c}(\tilde{a}, \tilde{b}, (\tilde{A}_i), \inf_M v_i, K, M)$). [2]

La formulation précédente en dimension 4 s'applique lorsqu'on suppose en x_0 point critique de $V > 0$ $V \in C^1(M)$. on fait la preuve avec $\min_M u \geq m > 0$ pour $v = u/\varphi$ avec $\varphi > 0$ duc changement de metrique conforme telle que $\tilde{Ricci}_{\tilde{g}}(x_0) = 0$, on obtient :

$$\exists\, c, R > 0, \quad \sup_{B_R(x_0)} v \leq c,$$

Donc,

---

1. Pour la preuve, comme c'est locale, on prend $x_0 \in M$, on fait un changement de metrique conforme $\tilde{g} = e^f g = \varphi^3 g$ de sorte que $\tilde{Ricci}_{x_0} = 0$, on a (voir le livre d'Aubin) $f(x_0) = 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. On prouve l'estimation en supposant $\min_M u \geq m > 0$ pour la nouvelle fonction $v = u/\varphi$ pour $m > 0$ (car, voir l'article de la preuve du cas general en dimension 4, il y a des termes $\tilde{Ricci}_{y_i}$ et $\tilde{R}_{\tilde{g}}(y_i)$, des termes en $o(1)$), comme $\varphi(x_0) = 1$, $\min_{B_r^{\tilde{g}}(x_0)} v \geq (\min_M u)/2 \geq m/2 > 0$. Comme on fait un changement de metrique conforme, au voisinage de x_0, tout est de "l'ordre" de u et m car $\varphi(x_0) = 1$, $f(x_0) = 1$, l'exponentielle (en norme de matrices) est $(1+\epsilon)-$ Lipschitzienne, on a changé de metrique, les majorants restent de l'ordre de $1 + \epsilon$ au voisinage de x_0 car $\varphi(x_0) = 1$, $(f(x_0) = 0)$, et la constante $k(a)$ entre $\min_M u$ et la norme du gradient de V est plus grande.

On prouve alors, en supposant l'inegalité entre le $\min_M u$ et le gardient de V : $\min_M u \geq m > 0 \Rightarrow \sup_{B_r^{\tilde{g}}(x_0)} v \leq c \Rightarrow \sup_K u \leq c(a, b, m, K, M)$. Apres on remplace m par $\min_M u$.

2. Concernant l'exponentielle dans le preuve du résultat ci-dessus. On commence par changer la metrique $d_g \to d_{\tilde{g}}$, on a un facteur $(1 + \epsilon)$, puis on considere $\tilde{\exp}_y$, l'exponentielle pour la metrique $\tilde{g}$, construite a partir d'une carte (Ω, ψ) normale en x_0 pour la metrique $\tilde{g}$, on passe de $d_{\tilde{g}}$ à $||\psi o \tilde{\exp}||_{\mathbb{R}^4}$, on a un majorant $(1 + \epsilon)$, puis on utlise le fait que $\dfrac{d}{dz}[z \to \tilde{\exp}_{x_0}(z)]_{|z=0} = id_{\mathbb{R}^4}$, c'est à dire que c'est vrai pour la differentielle de $\psi o \tilde{\exp}$ et par continuité des differentielle, (en y et z assez petits), on a un majorant $(1 + \epsilon)$, puis on utilise la norme matricielle sup des matrices et on ecrit que : $\psi o \tilde{\exp}_y(z_1) - \psi o \tilde{\exp}_y(z_2) = \int_0^1 \partial_s[\psi o \tilde{\exp}_y(s(z_1 - z_2) + z_2)]ds = \int_0^1 [(\partial_z(\psi o \tilde{\exp}_y)(s(z_1 - z_2) + z_2)) \cdot (z_1 - z_2)]ds$ et on obtient; $||\psi o \tilde{\exp}_y(z_1) - \psi o \tilde{\exp}_y(z_2)||_{\mathbb{R}^4} \leq (1+\epsilon)||z_1 - z_2||_{\mathbb{R}^4}$, uniformément en y voisin de x_0 et $|z_1| \leq r, |z_2| \leq r, r > 0$ assez petit.

$$\exists\, c, R > 0,\ u(x_0) \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c, \forall\, u > 0$$

Donc, on obtient une inégalité du type :

$$u(x_0) \leq c(x_0, V, \inf_M u, M, g),$$

pour toute solution $u > 0$ de l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à un $V > 0, V \in C^1(M)$ fixé ayant le point x_0 comme point critique, $\nabla V(x_0) = 0$. Ou bien $V \in C^{1,\alpha}(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et $||V||_{C^{1,\alpha}} \leq A$ et $\nabla V(x_0) = 0$, on obtient :

$$\forall\ u > 0,\ u(x_0) \leq c(a, b, A, \alpha, x_0, \inf_M u, M, g).$$

Il y a des exemples de solutions de l'equation de la courbure prescrite en dimension 4 avec x_0 point où V est maximum et M compacte sans bord dans le livre d'Aubin.

Quand on prend les notations de YY.Li et L.Zhang : $(M, g) = (B_1(0) \subset \mathbb{R}^4, g)$ et $0 < V \in C^1(B_1(0))$ avec $\nabla V(0) = 0$, on obtient l'estimation a priori dans un voisinage de 0 en supposant le minimum unifromément minoré et aussi :

$$u(0) \leq c(V, B_1(0), g, \inf_{B_1(0)} u), \tag{5}$$

pour toute solution $u > 0$ de l'equation dela courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement a V avec les conditions precedentes ou $V \in C^{1,\alpha}(B_1(0))$ avec $0 < \alpha \leq 1$, $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et $||V||_{C^{1,\alpha}} \leq A$ et $\nabla V(0) = 0$.

$$\forall\ u > 0,\ u(0) \leq c(a, b, A, \alpha, \inf_{B_1(0)} u, B_1(0), g). \tag{6}$$

Pour l'equation de Yamabe en dimensions 5 et 6 :

c) En dimension 5, il y a une relation explicite entre $\sup_K u$ et $\inf_M u$,

$$(\sup_K u)^{1/7} \times \inf_M u \leq c.$$

d) En dimension 6, on a une estimation a priori et une relation non explicite entre $\sup_K u$ et $\inf_M u$. Pour toute solution $u > 0$ de l'equation de Yamabe en dimension 6 :

$$\sup_K u \leq c(K, M, g, \inf_M u). \tag{7}$$

Pour l'equation de Yamabe et du type Yamabe en dimension 4, on a l'inégalité :

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c.$$

Concernant l'article : "Some uniform estimates for scalar curvature type equations". En dimension 4, on a en plus de l'estimation a priori une dependance non explicite du $\sup_K u$ en fonction du $\inf_\Omega u$:

$$\sup_K u \leq c(a, b, A, \alpha, K, \Omega, \inf_\Omega u), \tag{8}$$

pour le theoreme 3

et,

$$\sup_K u \leq c(a, V, K, \Omega, \inf_\Omega u). \tag{9}$$

pour le theoreme 4.

Remarque : On a bien une fonction c de l'inf car, pour chaque m on a une constante c_0 majorant de $\sup_K u$ et l'ensemble des majorants est lui meme minoré par $\sup_K u$, c est alors l'inf des majorants de $\sup_K u$, qui est unique. On voit alors que cette correspondance $m \to c$ est bien une fonction et aussi la correspondance $(a, b, K, \Omega, m) \to c$ est une fonction. Apres on remplace m par $\inf_\Omega u$ comme on l'a dit ci-dessus. On a bien la correspondance $(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \to c$ est une fonction.

De plus la fonction $m \to c$ est décroissante en $m > 0$. On a alors, si $\inf_\Omega u \geq m > 0$ (ou $\inf_M u \geq m > 0$, si on considere une variété Riemannienne M), alors $c(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \leq c(a, b, K, \Omega, m) < +\infty$, ou $(c(a, b, K, M, \inf_M u) \leq c(a, b, K, M, m)$, si on est sur une variété Riemannienne M), on obtient alors l'estimation a priori lorsque l'inf est uniformement minoré.

//

On a aussi les faits suivants :
I) 1) Conditions de platitudes d'ordre C^{n-2} de Yanyan Li $\Rightarrow$:
1-1) blow-up,
1-2) blow-up isolé,
1-3) blow-up isolé simple $\Rightarrow$,
1-3-1) $\sup \times \inf < +\infty$,
1-3-2) Energies bornées, $\int u^{2n/(n-2)} < +\infty$.
Voir les articles de Yanyan Li sur la sphere et de C.C.Chen-C.S.Lin, commun.pure.appl.math. 1997.

2) Conditions de platitudes d'odre C^α, $\frac{(n-2)}{2} \leq \alpha < n-2$ de C.C.Chen-C.S.Lin $\Rightarrow$:
2-1) blow-up,
2-2) blow-up isolé,
2-3) Pas de blow-up isolé simple $\Rightarrow$,
2-3-1) $\sup \times \inf \to +\infty$,
2-3-2) Energies bornées, $\int u^{2n/(n-2)} < +\infty$.
Voir les articles de C.C.Chen-C.S.Lin, J.Differential.Geometry.1998.

3) Conditions de platitudes d'odre $C^\alpha, 1 \leq \alpha < \frac{(n-2)}{2}$ de C.C.Chen-C.S.Lin $\Rightarrow$:
3-1) blow-up,
3-2) Energies non bornées, $\int u^{2n/(n-2)} \to +\infty$.
Voir les articles de C.C.Chen-C.S.Lin, J.Differential.Geometry.1998.

4) *Propriété intermediaire :* Propriété intermédiaire entre les points 1) et 2) : Inégalités du type $(\sup)^\alpha \times \inf < +\infty$. Voir travail de Thèse et Journal.Funct.Analysis.

II) Concernant les inégalités du type $(\sup)^\alpha \times \inf < +\infty$: Il faut considerer M_i^β dans les methodes, avec $M_i = u_i(y_i)$, y_i les poins blow-ups et résoudre une equation en β du premier ordre liée a la positivité de la fonction $(+-)$ la fonction auxiliaire.
Ceci s'applique aux methodes de :
a) Brezis-Li-Shafrir.
b) YY.Li-L.Zhang,
c) C.C.Chen-C.S.Lin.
Voir travail de Thèse et Journ.Funct.Analysis. Acta.Math.Scientia. Analysis in Theory and Applications.

III) Assertion minimale : $\sup < +\infty$ si $\inf > 0$: c'est vrai en dimension $n = 6$ Eq.de Yamabe. et en dimension $n = 4$ Eq de Yamabe et Eq de la courbure scalaire prescrite. Comme consequence $\sup_K u \leq f(\inf_M u)$ pour l'Eq de Yamabe en dimensions 4 et 6, et, $\sup_K u_i \leq f(\inf_M u_i)$, pour chaque suite (u_i) relativement a une suite (V_i) avec ,$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty$ et $|\nabla V_i| \leq A_i \to 0$, pour l'Eq de la courbure scalaire prescrite en dimension 4. Si on a une autre suite (v_i) relativement à une suite (W_i) Lipschitziennes avec $0 < c \leq W_i \leq d < +\infty$, de constantes de Lipschitz $B_i \to 0$ alors $\sup_K v_i \leq g(\inf_M v_i)$. Voir Travail de Thèse en dimension 4 (Eq. courbure scalaire prescrite en dimension 4, cas plat) et Journal. Funct. Analysis. et Journal.Math.Anal.Applications.

//

Consequence du resultat donnant une solution unique : inegalite de Sobolev et inegalite interpolation

Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 4$ et de courbure scalaire $S_g > 0$ partout sur M et orientable. Alors, voir le livre d'Aubin pour $\epsilon > 0$ assez petit $\epsilon < S_g$, l'equation $4\dfrac{(n-1)}{n-2}\Delta u + \epsilon u = u^{N-1}, u > 0$ a une solution et le resultat d'unicité dit que cette solution est unique. (Voir le livre d'Aubin, la fonctionnelle associée à cette equation possede un infimum atteint par cette solution unique). On a alors (voir aussi l'article de L.Veron et J.R. Licois et l'article sur Hal de J.Dolbeault, Esteban, Loss), une inégalité d'interpolation et une inégalité de Sobolev :

$\exists\, \epsilon_0 = \epsilon_0(n,M,g) > 0$, tel que pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ on ait :

$$\inf_{u \in H^1(M)-\{0\}} \frac{4\frac{(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 dV_g + \epsilon \int_M u^2 dV_g}{(\int_M |u|^N dV_g)^{2/N}} = \epsilon (vol(M))^{2/n},$$

Qu'on peut ecrire :

Pour tout $u \in H^1(M)$, on a :

$$4\frac{(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 dV_g \geq \epsilon \left(\left(\int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N} (vol(M))^{2/n} - \int_M u^2 dV_g \right),$$

ou encore,

$$\forall u \in H^1(M),\ 4\frac{(n-1)}{n-2}||\nabla u||_2^2 \geq \epsilon \left((vol(M))^{2/n} ||u||_{2^*}^2 - ||u||_2^2 \right) \geq 0,$$

avec $2^* = N = \dfrac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 4$.

Finalement : il existe $C = C(n,M,g) > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(M),\ ||\nabla u||_2^2 \geq C \left((vol(M))^{2/n} ||u||_{2^*}^2 - ||u||_2^2 \right) \geq 0,$$

avec $2^* = N = \dfrac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 4$.

On a une interpretation du point de vue de la physique de cette inégalité. Pour les inégalités isopérimetriques, on a une relation entre le perimetre et l'aire, du point de vue de la géometrie. Ici, on a une relation entre l'énergie et le $N-$volume pour une distribution Sobolev $H^1(M)$. Distributions, énergie (normes H^1) et $N-$volume généré par cette distribution.

2.1. **Sur les problemes du type** $\sup \times \inf$ **:**

1) Probleme de Li-Zhang :

Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 5$ de courbure scalaire S_g, on considere l'equation de Yamabe :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u + S_g u = u^{N-1},\ u > 0,\ N = 2n/(n-2).$$

$\Delta = -\nabla^i(\nabla_i)$ l'operateur de Laplace-Beltrami.

a) Est il vrai d'avoir pour tout compact $K \subset M$,

$$\sup_K u \times \inf_M u \leq c(K,M,g)\,?$$

b) En particuler pour $n = 6$ (inégalité explicite), est il vrai qu'on a :

$$(\sup_K u)^\alpha \times \inf_K u \leq c,\ 0 < \alpha \leq 1\,?$$

2) Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension 4 de courbure scalaire S_g, on considere l'equation de la courbure scalaire prescrite V :

$$\Delta u + \frac{1}{6} S_g u = V u^3,, \ u > 0.$$

$\Delta = -\nabla^i(\nabla_i)$ l'operateur de Laplace-Beltrami. On suppose :

$$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty, \ ||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$$

a) Est il vrai que :

$$\exists \, \alpha \in (0,1], \ (\sup_K u_i)^\alpha \times \inf_M u_i \leq c = c(a, b, (A_i)_i, K, M, g)\,?$$

b) Qu'en est il du cas $(M, g) = (\Omega \subset \mathbb{R}^4, \delta)$?

c) (Résultat du type CC.Chen-CS.Lin du cas plat), qu'en t il si on suppose que V verifie :

$$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty, \ ||\nabla V_i||_\infty \leq A, \ ||\nabla^2 V_i||_\infty \leq B\,?$$

Plus précisement, a t on :

$$\exists \, \alpha \in)0,1], \ (\sup_K u)^\alpha \times \inf_M u \leq c = c(a, b, A, B, K, M)\,?$$

2.2. **Probleme de Brezis-Li-Shafrir :**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ici, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$, on considere l'equation suivante :

$$-\Delta u = V e^u,$$

avec $V > 0$ et continue sur Ω.

A t on, pour tout compact $K \subset \Omega$:

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(K, V, \Omega) \ ?$$

2.3. **Problemes du type Brezis-Merle :**

Soit Ω un ouvert regulier de $\mathbb{R}^2$, ici, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$. On considere les equations suivantes :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = |x - x_0|^{2\beta} V e^u, \ \epsilon \in (0,1], \ x_0 \in \partial\Omega,$$

avec,

$$\beta \geq 0, \ 0 \leq V \leq b, \ |x - x_0|^{2\beta} e^u \in L^1(\Omega), \ u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

a) Donner le comportement "blow-up" au bord et un critere de compacité des solutions en u.

b) Qu'en est il si V est Lipschitzienne ?

c) De meme, donner le comportement "blow-up" et un critere de compacité pour les solutions de :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = |x - x_0|^{-2\alpha} V e^u, \ \epsilon \in (0,1], \ x_0 \in \partial\Omega.$$

Ici $\alpha \in (0,1)$ ou $\alpha \in (0,1/2)$ et,

$$0 \leq V \leq b, \ |x - x_0|^{-2\alpha} e^u \in L^1(\Omega), \ u \in W_0^{1,1}(\Omega)$$

d) Qu'en est il si on suppose V Lipschitzienne ?

e) Memes questions avec le cas regulier ; equation elliptique avec poids holderien et singualtité au bord :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = (1 + |x - x_0|^{2\beta}) V e^u, \ \epsilon \in (0,1], \ x_0 \in \partial\Omega,$$

avec,

$$1/2 > \beta \geq 0, \ 0 \leq V \leq b, \ e^u \in L^1(\Omega), \ u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Références

[1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.

[2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959

[3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.

[4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.

[5] Azé. Analyse variationelle...ellipse.1997.

[6] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.

[7] A. Besse. Einstein manifolds. Springer. 1987.

[8] Bredon. Geometry and Topology. Springer.

[9] Brezis. Analyse fonctionelle ; 1983

[10] H. Brezis, YY. Li, I. Shafrir. A sup+inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities. J.Funct.Anal.115 (1993) 344-358.

[11] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[12] Brezis, Merle. Uniform estimate and blow-up behavior... Comm.P.D.E..1991.

[13] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. Arch. Rational. Mech. Anal. 122 (1993) 145-157.

[14] M. G. Crandall. P.H. Rabinowitz. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. 1975.

[15] Dautray-Lions. Part 2. Laplace Operator.

[16] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63

[17] De Figueiredo. Do O. Ruf. System. 2006.

[18] Do Carmo. Riemannian Geometry.

[19] Druet.Hebey.Robert. Green functions. 2004.

[20] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.

[21] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.

[22] William Goldman. 1983. Existence de varietes sans structure plate.

[23] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.

[24] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.

[25] Hatcher. Sur les Torus Bandles.

[26] Hirsch. M. Differential Topology.

[27] Huber.A. On subharmonic functions in the large. (1957)

[28] Hulin, Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces.(1992)

[29] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.

[30] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.

[31] Kobayashi, Nomizu. Differential Geometry.

[32] N. Korevaar, F. Pacard, R. Mazzeo, R. Schoen. Refined asymptotics for constant scalar curvature metrics with isolated singularities. Invent. Math. 135 (1999), no. 2, 233–272.

[33] Kuiper. (Conformally flat structure in the large). (1949).

[34] Kulkarni. Conformally flat manifolds.1972.

[35] Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.

[36] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.

[37] Nazaraov, S, A. Sweers, G. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. Journal of Differential Equations. 233, 1, 2007, 151-180.

[38] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.

[39] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342

[40] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les varietes a bord.

[41] Schoen, R. Yau, S-T, On the positive mass conjecture in dimension 3. Comm. Math. Phys. 1979.

[42] R. Sa Earp. E. Tubiana. Introduction a la geometrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.

[43] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds. arXiv:gr-qc/0506101.

[44] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds. arXiv:gr-qc/0610045.

[45] Choquet-Bruhat.Yvonne, Isenberg.James, York.James. W. Einstein Constraints on Asymptotically Euclidean Manifolds. arXiv:gr-qc/9906095.

[46] Premoselli.B. Stability and instability of the Einstein-Lichnerowicz constraint system. arXiv:1502.04233v1

[47] Carlotto.A. The general relativistic constraints equations. Living reviews in Relativity. 24, 2, 2021. Springer.

[48] Horvat.R, Krcmar.M, Lakic.B. Recent searches for solar axions and large extra dimensions. arXiv:hep-ph/0112224.

[49] Horvat.R, Krcmar.M, Lakic.B. CERN Axion Solar Telescope as a probe of large extra dimensions. arXiv:astro-ph/0312030.

[50] Hillen.T, Painter.K. Global existence for a parabolic chemotaxis model with prevention of overcrowding. Adv. Appl. Math. 26, 280-301, 2001.

[51] Keller. E. F, Segel, L.A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability.J. Theoret. Biol., 26 (1970), pp. 399-415.

[52] Lin. C.S, Ni. W.M, Takagi.I Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. Journ. Diff. Equations, volume 72, no 1, 1988, pp 1-27.

[53] T. H ; Parker. Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds, Comm. Math. Phys. 1982.

[54] YY.Li. Prescribing Scalar curvature on S_n. Part I. Journ.Diff.Eq.1995.Part II.

[55] C.C.Chen. C.S.Lin. Journal. Differential.Geometry. 1998.

[56] L.Ma. J.Wei. Convergence for Liouville Equation. 2001.

[57] Nagasaki.Suzuki. 1990.

[58] G.F. Giudice. J.D. Wells ; Extra-dimensions. Review of Particle Physics, 2005-2006. Particle Data Group. nouvelle edition 2021.

[59] Keller-Osserman.

[60] M.F.Bidaut-Véron. L. Véron. Estimations pour equations et systemes, voir leur bibliographie.

[61] Véron.L. Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary. Journal d'Analyse Mathematique, 59, 231-250, 1992.

[62] M.Rigoli. S. Zamperlin. A priori estimates, uniqueness and existence of positive solutions of Yamabe type equations on complete manifolds. Journ. Funct.Analysis. 245, 1, 2007, 144-176.

[63] P.Aviles. R. C. McOwen. Conformal Defomration to constant negative scalar curvature on noncomapct manifolds. Journal.Diff.Geometry. 27, (1988), 225-239.

[64] A.Ratto. M.Rigoli. L.Veron. Scalar curvature and conformal deformations of noncompact Riemannian manifolds. Math Z. 225, 395-426 (1997).

[65] Leray.J, Schauder.J. Topologie et equations fonctionnelles. Annales de l'ENS. 1934.

[66] Mawhin.J. Leray-Schauder degree :a half century of extensions and applications. Topological methods in Nonlinear Analysis.Journal of the Juliusz Schauder Center. volume 14, 1999, 195-228.

[67] Brezis.H, F.Browder. PDEs in 20th century. Advances in Mathematics, volume 135, 1, 76-144, 1998.

EQUIPE D'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 2, PLACE JUSSIEU, 75005, PARIS, FRANCE.

Email address: samybahoura@gmail.com