Global existence of a heavy ball model with a varying nonnegative friction

7 avril 2021

Hassan MCHEIK [1] and Zaynab SALLOUM[1]

Abstract. In this paper, we study a dissipative dynamical system non linear of second order $\ddot{x}(t) + \lambda(t)\,\dot{x}(t) + \nabla\Phi(x(t)) = 0$, with the non-negative friction coefficient $\lambda \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ and the internal constraint $\Phi \in \mathcal{C}^2$.

Key-words : dissipative dynamical system, local minima, heavy ball with friction depending on time.

Résumé

Existence globale d'un système modélisant la boule pesante avec un frottement variable positif. Dans cette note, nous allons étudier le système dynamique dissipatif non linéaire du second ordre $\ddot{x}(t) + \lambda(t)\,\dot{x}(t) + \nabla\Phi(x(t)) = 0$, où $\lambda \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ est un cœfficient du frottement positif et $\Phi \in \mathcal{C}^2$ est une contrainte interne.

Mots clés : système dynamique dissipatif, point critique, fonction convexe, équation de la boule pesante dépendant du temps.

1. Lebanese University, Faculty of Sciences, Beirut, Lebanon. hassan.mcheik@ul.edu.lb (Hassan MCHEIK), salloum@ul.edu.lb (Zaynab SALLOUM)

1 Introduction

Dans ce travail, nous étudions un système dynamique dissipatif non linéaire, que nous allons nommer HBFT (heavy ball with friction depending on time),

$$\ddot{x}(t) + \lambda(t)\,\dot{x}(t) + \nabla\Phi(x(t)) = 0,$$

dans le cas où la contrainte externe du frottement $\lambda(t)$ dépend du temps avec des conditions initiales sur la trajectoire. Notre objectif est de prouver un résultat d'unicité et d'existence de la trajectoire avec quelques résultats préliminaires pour préparer à démontrer la nature de la convergence (forte ou faible) de la trajectoire avec des contraintes externes et internes.

Pour cela, nous commençons par transformer notre problème à un système du premier ordre dans un espace de Hilbert, résolu par la méthode de Cauchy-Lipschitz.

Le travail est organisé comme suit. Après la problématique physique dans la section 2. et la modélisation mathématique dans la section 3, nous présentons, dans la section 4, nos notations ainsi que nos espaces. Enfin, dans les sections 5 et 6 nous citons les hypothèses sur les contraintes et nous prouvons les théorèmes principaux.

2 Problématique physique

Nous considérons une boule pesante avec une contrainte externe du frottement, qui dépend du temps. Soit $M = (x(t), \Phi(x(t)))$ un point matériel de masse m, $\Sigma = graphe(\Phi)$ et $r\vec{(t)}$ est le vecteur de position à l'instant t, défini par $r\vec{(t)} = (x(t), \Phi(x(t)))$.

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) nous donne :

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{G} + \vec{F} + \vec{R}, \tag{1}$$

avec $\dot{\vec{r}}(t) = \big(\dot{x}(t), \nabla\Phi(x(t))\dot{x}(t)\big)$ est le vecteur vitesse, $r\ddot{\vec{(t)}} = \big(\ddot{x}(t), \dot{x}(t)(H_\Phi(x(t)))\ddot{x}(t) + \nabla\Phi(x(t))\ddot{x}(t)\big)$ est le vecteur d'accéleration, où H_Φ est la matrice hessienne de Φ en x. $\vec{R} = R\vec{n}$ désigne le vecteur de la réaction sur Σ, $\vec{F}(t) = -\lambda(t)\dot{\vec{r}}(t)$ est le vecteur de la force de frottement, λ est une contrainte externe de frottement, $\vec{G} = (0, -mg)$ est la force gravitationnelle et $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x)|^2}}(-\nabla\Phi(x), 1)$ est le vecteur normal.

Dorénavant, on s'intéresse aux cas dans lesquels les fonctions $|\nabla\Phi(x)|$ et $\dot{x}H_\Phi\dot{x}$ sont négligeables par rapport à 1 et g respectivement (*i.e.* $|\nabla\Phi(x)| <<< 1$ et $\dot{x}H_\Phi\dot{x} <<< g$). En effet, le fait que $|\nabla\Phi(x)| <<< 1$ va nous aider à trouver l'ensemble des points limites dans un ensemble bien déterminé dépendant de Φ (en général, c'est l'ensemble des points critiques de Φ) celui-ci est défini comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ tels que $\nabla\Phi(x) = 0$. En plus, $\dot{x}H_\Phi(x)\dot{x} <<< 1$ signifie qu'à partir d'un certain temps, la vitesse de la trajectoire devient très proche de zéro.

En faisant les projections canoniques de l'équation du principe fondamental de la dynamique, on obtient les équations différentielles suivantes :

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - \frac{R}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x)|^2}}\nabla\Phi(x). \tag{2}$$

$$m(\dot{x}H_\Phi\dot{x} + \nabla\Phi(x)\ddot{x}) = -mg - \lambda\nabla\Phi(x)\dot{x} + \frac{R}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x)|^2}}. \tag{3}$$

On prend $R > 0$, car il y a toujours des contacts entre la particule $M(x, \Phi(x))$ et la surface Σ.

Puis, en projettant suivant la direction normale, on trouve

$$R = \frac{m}{\sqrt{1+|\nabla\Phi(x)|^2}}(g + \dot{x}H_\Phi\dot{x}) \tag{4}$$

En utilisant les équations systématiques (2) et (4), on obtient

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \frac{m}{1+|\nabla\Phi(x)|^2}(g + \dot{x}H_\Phi\dot{x})\nabla\Phi(x) = 0. \tag{5}$$

En faisant les aproximations $|\nabla\Phi(x)| <<< 1$ et $\dot{x}H_\Phi\dot{x} <<< g$, on obtient

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + mg\nabla\Phi(x) = 0.$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \nabla\Phi(x) = 0.$$

3 Modélisation Mathématique

On s'intéresse dans ce papier au système dynamique dissipatif non linaire $(HBFT)$, qui modélise l'équation de la boule pesante au point matériel $M(t) = (x(t), \Phi(x(t))$,

$$\ddot{x}(t) + \lambda(t)\dot{x}(t) + \nabla\Phi(x(t)) = 0, \lambda(t) > 0,$$

où la contrainte λ est une fonction correspondante à un coefficient de frottement, avec des conditions initiales classiques et des contrôles optimaux sur les contraintes internes et externes Φ et λ, respectivement.

Intuitivement, l'interpretation mécanique de ce système dépend de l'énergie initial donné par $E_0 = \frac{1}{2}\left|\dot{x_0}\right|^2 + \Phi(x_0)$, où $x_0 = x(0)$ et $\dot{x_0} = \dot{x}(0)$ sont respectivement le point de départ et la vélocité au temps initial $t_0 = 0$. D'autre part, la position du point $M(t)) = (x(t), \Phi(x(t))$ dépend de la contrainte externe $\lambda(\cdot)$ et tend de proche en proche vers le point M^*, qui est en génèral un point stable dépend de la caractérisation de Φ. Les résultats concernant la convergence de la solution, par exemple vers un point critique, sont donnés dans plusieurs cas, incluant le cas où Φ est une fonction convexe ; une fonction de morse ou une fonction ayant un nombre fini d'intervalles de stabilité. La trajectoire du système $(HBFT)$ converge asymptotiquement vers un minimum local de Φ.

Dans la suite, on définit le système dynamique (HBFT) suivant [cf. 1,2,3,4] :

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}(t) + \lambda(t)\dot{x}(t) + \nabla\Phi(x(t)) = 0 \\ \lambda : [0, +\infty[\to R_+ \text{ continue.} \end{array} \right. \tag{1}$$

De plus, l'énergie de ce système est définie par $E(t) = \frac{1}{2}\left|\dot{x}(t)\right|^2 + \Phi(x(t))$, dont la dérivée est $\dot{E}(t) = -\lambda(t)\left|\dot{x}(t)\right|^2$. On remarque que l' énergie est décroissante polynomialement en fonction du temps.

4 Notations, espaces et normes

Dans toute la suite, $\mathcal{H}$ dénote un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée $|\cdot|$. Nous utilisons l'espace L^p, qui est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif. On désigne par argminΦ l'ensemble non vide des points critiques de Φ, *i.e.* argmin$\Phi =: \{x \in \mathcal{H}, \nabla\Phi(x(t)) = 0\}$.

4.1 Hypothèses sur les contraintes

Dans cette partie, nous commençons par préciser des hypothèses sur les fonctions $\Phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et $\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$.

Les hypothèses standards sur Φ (voir [5]) seront notées (H_Φ), et données par :

$$(\mathrm{H}_\Phi)\begin{cases} \mathrm{H}^1_\Phi. & \text{la fonction } \Phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathcal{H}.\\ \mathrm{H}^2_\Phi. & \text{la fonction } \nabla\Phi \text{ est Lipschitzienne sur les parties bornées de } \mathcal{H}.\\ \mathrm{H}^3_\Phi. & \text{la fonction } \Phi \text{ est bornée inférieurement.}\end{cases}$$

Dans ce papier, nous proposons des conditions sur la contrainte externe λ qui dépend du temps. Ces hypothèses sont notées (H_λ) et données par :

$$(H_\lambda)\begin{cases} \mathrm{H}^1_\lambda. & \lambda \text{ est une fonction continue sur } [0,\infty[.\\ \mathrm{H}^2_\lambda. & \text{Il existe } M>0 \text{ et } t_1\geq 0, \text{ tel que pour tout } t\geq t_1, \text{on a } \lambda(t)\leq M,\\ & \quad i.e. \limsup_{t\to\infty}\ \lambda(t)<\infty.\end{cases}$$

4.2 Résultats principaux.

Dans cette section, nous commençons par établir les résultats d'existence et d'unicité de solutions du système (HBFT), en utilisant le théorème de Cauchy-Lipshitz et par application du théorème d'Ascoli (cf. [5]). En effet, H. Attouch, X. Goudou et P. Redont [5] ont étudié le système (HBF), où la contrainte λ est une constante, et Φ vérifie les conditions standards (H_Φ).

Nous commençons par annoncer le premier résultat :

Théorème 4.1 *Soient $\Phi : \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ et $\lambda : [0,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions vérifiant les hypothèses (H_Φ) et H^1_λ, alors on a les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $(x_0,\dot{x}_0)$ dans $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, il existe une solution unique x de classe C^2 de système (1) *définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et vérifiant les conditions initiales $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=\dot{x}_0$.*

(ii) Pour toute trajectoire x de (1)*, l'énergie correspondante E est décroissante polynomialement sur $[0,+\infty\ [$ et converge vers E_∞ et de plus :*

$$\dot{x}\in L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H}) \ \ et\ \sqrt{\lambda}\dot{x}\in L^2([0,\infty[;\mathcal{H}).$$

Preuve du Théorème 4.1

(i) Pour toute condition initiale $(x_0,\dot{x}_0)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz plus les hypothèses H_Φ et H^1_λ, le système (1) possède une solution unique de classe C^2, définie sur l'intervalle $[0,T_{\max}[$, avec $0<T_{\max}\leq\infty$. Dans le but de trouver $T_{\max}=\infty$,

montrons que $\dot{x}$ est bornée.

L'équation $(1)_1$ et la régularité de Φ et H^1_λ impliquent que x est de classe C^2 sur $[0, T_{\max}[$. En effet, on transforme le système $(HBFT)$ en un système réduit dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de la forme :

$$\dot{Y}(t) = F(Y(t), t), \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \tag{2}$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad et \quad F(u, v, t) = \begin{pmatrix} v \\ -\lambda(t)v - \nabla\Phi(u) \end{pmatrix}.$$

Puisque $\nabla\Phi$ est localement Lipschitzienne et λ est continue, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz nous affirme l'existence et l'unicité d'une solution locale de problème (2). Soit x la solution maximale du système $(HBFT)$, définie sur $[0, T_{\max}[$, avec $0 < T_{\max} \leq \infty$. Tout d'abord, l'énergie de ce système dissipatif est donné par :

$$E(t) = \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \Phi(x(t)).$$

En dérivant l'équation de l'énergie E puis en utilisant (1), on obtient :

$$\dot{E}(t) = -\lambda(t) |\dot{x}(t)|^2 . \tag{3}$$

Puisque $\lambda(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, alors la fonction E est décroissante sur $[0, T_{\max}[$, et pour tout t appartient à $[0, T_{\max}[$, on a $E(t) \leq E(0)$. Cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \Phi(x(t)) \leq \frac{1}{2} |\dot{x}_0|^2 + \Phi(x_0). \tag{4}$$

De plus, puisque Φ est minorée (hypothèse H^3_Φ), alors on peut affirmer que,

$$\|\dot{x}\|_\infty = \sup_{[0, T_{\max}[} |\dot{x}(t)| < \infty.$$

Montrons maintenant que $T_{\max} = \infty$.

En effet, supposons que $T_{\max} < \infty$, alors d'après le théorème des accroissements finis :

$$\forall t,\, t' \in [0, T_{\max}[, \left|x(t) - x(t')\right| \leq \|\dot{x}\|_\infty \left|t - t'\right| .$$

D'autre part, puisque $T_{\max} < \infty$ et x est continue sur $[0, T_{\max}[$, alors $\lim\limits_{t \to T_{\max}} x(t) = x_\infty$ existe, alors x et $\dot{x}$ sont bornées sur $[0, T_{\max}[$, et par l'équation (1), la fonction $\ddot{x}$ est bornée sur cet intervalle. Alors $\lim_{t \to T_{\max}} \dot{x}(t) = \dot{x}_\infty$ existe. Par suite, on note $\lim_{t \to T_{\max}} (x(t), \dot{x}(t)) = (x_\infty, \dot{x}_\infty)$.

De nouveau, on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz avec les conditions initiales obtenues $(x_\infty, \dot{x}_\infty)$. Dans ce cas, $T_{\max}$ est le point de départ et la solution maximale est définie sur un intervalle $[T_{\max}, T'_{\max}[$. Par suite, on trouve une solution locale de (1), définie sur un intervalle $[0, T'_{\max}[$ plus large que $[0, T_{\max}[$ avec $T_{\max} < T'_{\max}$, ce qui donne une contradiction, donc $T_{\max} = \infty$.

(ii) On a prouvé que E est décroissante sur $[0, \infty[$ et d'aprés H_Φ, Φ est minorée et de plus $E(t) \geq \Phi(x(t))$, alors l'énergie E est minorée. Par conséquence $\lim_{t \to \infty} E(t) = E_\infty$ existe, avec $E_\infty \in \mathbb{R}$.

En utilisant (4) et l'hypothèse H_Φ^3, on obtient que :

$$\frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |\dot{x}_0|^2 + \Phi(x_0) - \inf \Phi, \text{ pour tout } t \geq 0, \tag{5}$$

alors,

$$\dot{x} \in L^\infty([0, \infty[; \mathcal{H}).$$

De (3), on a pour tout $0 \leq t < \infty$,

$$\int_0^t \lambda(s) |\dot{x}(s)|^2 ds = -\int_0^t \dot{E}(s) ds.$$

Par suite,

$$\int_0^\infty \lambda(s) |\dot{x}(s)|^2 ds = -\int_0^\infty \dot{E}(s) ds = -\Big(E_\infty - E_0\Big).$$

Donc

$$\sqrt{\lambda(.)}\dot{x} \in L^2([0, \infty[; \mathcal{H}).$$

Lemme 4.2 *Soit $f : [0; \infty[\to \mathcal{H}$ une fonction de classe $C^1([0; \infty[; \mathcal{H})$ et vérifiant $f \in L^2([0, \infty[; \mathcal{H}) \cap L^\infty([0, \infty[; \mathcal{H})$, et $\dot{f} \in L^\infty([0, \infty[; \mathcal{H})$, alors on a $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.*

Preuve du Lemme 4.2

On définit la fonction $h : [0; \infty[\to \mathbb{R}^+$ par $h(t) = \|f(t)\|^2$. Il suffit de démontrer que $\lim_{t \to \infty} h(t) = 0$.

En effet, supposons que $\lim_{t \to \infty} h(t) \neq 0$.

Tout d'abord, nous allons démontrer que $\liminf_{t\to\infty} h(t) = 0$. Sinon, c'est à dire $\liminf_{t\to\infty} h(t) > 0$, par suite il existe $\varepsilon > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, on a $h(t) \geq \varepsilon$. Alors,

$$\int_0^\infty \|f(t)\|^2 \, dt = \int_0^\infty h(t)dt \geq \int_{t_0}^\infty h(t)dt \geq \int_{t_0}^\infty \varepsilon dt = \infty,$$

ce qui contredit avec le fait que $f \in L^2([0,\infty[;\mathcal{H})$.

Par suite, $0 = \liminf_{t\to\infty} h(t) < \limsup_{t\to\infty} h(t)$. Donc, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\limsup_{t\to\infty} h(t) > \varepsilon$. En utilisant la continuité de la fonction h et le théorème des valeurs intermédiaires, ils existent deux suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$, qui tendent vers l'infini, telles que $h(t_n) = \varepsilon$ et $h(s_n) = \frac{\varepsilon}{2}$.

De plus, h est dérivable et $\dot{h}(t) = 2 < f(t), \dot{f}(t) >$. Ensuite, $\dot{h} \in L^\infty([0,\infty[)$ car $|\dot{h}(t)| \leq \|\dot{f}\|_\infty \|f\|_\infty < \infty$.
En conséquence, h et $c-$lipshtitizienne et $\frac{\varepsilon}{2} = |h(t_n) - h(s_n)| \leq c|t_n - s_n|$. Donc il existe $\eta > 0$ telle que $|t_n - s_n| > \eta$.

Soit $\tau_n = \dfrac{s_n + t_n}{2}$, alors τ_n converge vers l'infini. On déduit qu'il existe $\delta = \frac{\eta}{4} > 0$ tel que pour tout t, avec $|\tau_n - t\,| \leq \delta$, on a $h(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors

$$\int_0^\infty \|f(t)\|^2 \, dt = \int_0^\infty h(t)\, dt \geq \sum_{n\geq 1} \int_{t_n-\delta}^{t_n+\delta} h(t)\, dt \geq \sum_{n\geq 1} \int_{t_n-\delta}^{t_n+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\, dt = \infty,$$

donc $f \notin L^2([0,\infty[;\mathcal{H})$, ce qui contredit avec l'hypothèse. Donc, $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$.

Théorème 4.3 *Sous les conditions du théorème (4.1) et si de plus x est dans $L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H})$, alors on a :*

i. $\ddot{x} \in L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H})$.

ii. Si λ est dérivable et $\dot{\lambda}$ est borné, alors

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{\lambda(t)}\dot{x}(t) = 0.$$

Preuve du Théorème 4.3

Puisque x appartient à $L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H})$, $\dot{x} \in L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H})$ et $\lambda(.)$ est borné, alors d'après Théorème $(4.1)_{ii.}$ on a $\sqrt{\lambda(.)}\dot{x} \in L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H})$.

En utilisant l'équation (1), et $\nabla\Phi$ qui est bornée sur les parties bornées de $\mathcal{H}$, on trouve que $\ddot{x} \in L^\infty([0,\infty[;\mathcal{H})$.

Montrons maintenant que $\lim_{t\to\infty} \sqrt{\lambda(t)}\dot{x}(t) = 0$. En effet, soit $h(t) = \lambda(t)\,|\dot{x}(t)|^2$. Il suffit de montrer que $h \in L^2([0,\infty[;\mathbb{R}) \cap L^\infty([0,\infty[;\mathbb{R})$, et $\dot{h} \in L^\infty([0,\infty[;\mathbb{R})$.

Tout d'abord, on a $h \in L^2([0,\infty[;\mathbb{R})$ car

$$\int_0^\infty h^2(t)dt = \int_0^\infty \lambda^2(t)\,|\dot{x}(t)|^4\,dt \le \|\lambda\|_\infty \|\dot{x}\|_\infty^2 \int_0^\infty \lambda(t)\,|\dot{x}(t)|^2\,dt < \infty.$$

De plus,

$$\dot{h}(t) = \dot{\lambda}(t)\,|\dot{x}(t)|^2 + 2\lambda(t)\,\langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t)\rangle \in L^\infty([0,\infty[;\mathbb{R}),$$

car λ, $\dot{\lambda}$, $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ sont bornées.

En utilisant le Lemme (4.2), on obtient aue $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ et par suite $\lim_{t\to\infty} \sqrt{\lambda(t)}\dot{x}(t) = 0$.

Remarque. *Nous indiquons que lorsque la trajectoire x du système (HBFT) est précompact pour la norme induite de $\mathcal{H}$. Le résultat du Théorème 4.3, $\lim_{t\to\infty} \sqrt{\lambda(t)}\dot{x}(t) = 0$ peut être obtenu comme conséquence du principe d'invariance de LaSalle (cf. [6], [7]).*

Références

[1] F. Alvarez, *On the minimizing property of a second order dissipative system in Hilbert space*, SIAM J. on control and optimization, **38**(4), pp.1102-1119, 2000.

[2] H. Attouch and R.Cominetti, *A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method*, J. differential Equations **128**, pp.519-540, 1996.

[3] H. Attouch AND M.-O.Czarnecki, *Asymptotic control and stabilization of non linear oscillators with non isolated equilibria*, J.Differential Equations, **179**, pp.278-310, 2002.

[4] H. Attouch, A.Cabot ABOT, and P. REDONT, *Shock solutions via epigraphical regularization of a second order in time gradient-like differential inclusion*, Adv. Math. Sci. Appl., **12**, pp.273-306, 2002.

[5] H. Attouch, X. Goudou, and P. Redont, *The heavy ball with friction method. I. The continuous dynamical system*, commun. contemp. Math.,**2**, pp.1-34, 2000.

[6] J. M. Ball, *On the asymptotic behaviour of generalized process, with applications to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eq., **27**, pp.224-265, 1978.

[7] A. Haraux, *Nonlinear evolution equations : Global behaviour of solutions*, Lecture Notes in Math. **481**, Springer, 1981.