Автоморфизмы трёхмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик

А. А. Авилов

31 декабря 2018 г.

Аннотация

Доказывается, что все трёхмерные G-многообразия дель Пеццо степени 4 с терминальными особенностями, за исключением однопараметрического семейства и четырёх выделенных случаев, эквивариантно перестраиваются в проективное пространство $\mathbb{P}^3$, квадрику $Q \subset \mathbb{P}^4$, G-расслоение на коники или поверхности дель Пеццо. Также мы покажем, что одно из четырёх выделенных многообразий является бирационально жёстким относительно подгруппы в группе автоморфизмов индекса 2.

Библиография: 14 названий.

1 Введение

Одной из мотивировок данной работы является получение бирациональной классификации трёхмерных G-многообразий, т.е. многообразий с бирегулярным действием конечной группы G. Мы будем работать над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Хорошо известно, что в этом случае существуют эквивариантное разрешение особенностей (см., например, [1]) и эквивариантная программа минимальных моделей в размерности 3 (см., например, [2] и [3, §3.6]), которая позволяет привести любое трёхмерное G-многообразие X с помощью определённых эквивариантных бирациональных перестроек к G-многообразию $\bar{X}$ со следующими свойствами: оно $G\mathbb{Q}$-факториально, имеет не более чем терминальные особенности и либо канонический класс является эффективным, либо на нём есть структура G-расслоения Мори.

Определение 1.1. G-многообразие $\bar{X}$ с не более чем терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными особенностями называется *G-расслоением Мори*, если существует такой морфизм $\pi : \bar{X} \to Y$, что $\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}} = \mathcal{O}_Y$, $\dim X > \dim Y$, $\rho^G(X/Y) = 1$ и относительный антиканонический класс $-K_{X/Y}$ является π-обильным.

Определение 1.2. Пусть $\pi : \bar{X} \to Y$ – G-расслоение Мори. Если Y является точкой, то многообразие $\bar{X}$ называется *$G\mathbb{Q}$-многообразием Фано*. Если при этом канонический класс является дивизором Картье, то $\bar{X}$ называется *G-многообразием Фано*.

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-02164 и 15-01-02158).

Определение 1.3. Пусть $\pi : \bar{X} \to Y$ – трёхмерное G-расслоение Мори. Тогда оно называется *расслоением на коники* (соотв., *поверхности дель Пеццо степени* d), если общий слой расслоения изоморфен конике (соотв., поверхности дель Пеццо степени d).

Определение 1.4. Трёхмерное многообразие $\bar{X}$ называется *многообразием дель Пеццо* (см., например, [4]), если оно имеет не более чем терминальные горенштейновы особенности, а его антиканонический класс $-K_{\bar{X}}$ является обильным дивизором Картье и делится на 2 в группе Пикара. Если G – такая конечная подгруппа $\mathrm{Aut}(\bar{X})$, что $\bar{X}$ является $G\mathbb{Q}$-многообразием Фано, то будем говорить, что $\bar{X}$ *G-минимально*, а группу G в этом случае будем называть *минимальной*.

Определение 1.5. Трёхмерное многообразие $\bar{X}$ называется *слабым многообразием дель Пеццо*, если оно имеет не более чем терминальные горенштейновы особенности, а его антиканонический класс $-K_{\bar{X}}$ является численно эффективным объёмным дивизором Картье и делится на 2 в группе Пикара.

Трёхмерные G-многообразия дель Пеццо были частично классифицированы Ю. Прохоровым в работе [5]. Основным их инвариантом является *степень* $d = (-\frac{1}{2}K_{\bar{X}})^3$, которая может принимать значения от 1 до 8. В этой работе мы рассмотрим случай $d = 4$. Этот выбор обусловлен тем, что в случаях $d \geq 5$ имеется ровно четыре G-многообразия Фано, и их группы автоморфизмов хорошо изучпны, поэтому $d = 4$ – первый нетривиальный случай.

Второй мотивировкой данной работы является изучение конечных подгрупп в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Группа $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{K})$ – это группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$. Конечные подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{K})$ были полностью классифицированы И. Долгачёвым и В. Исковских в работе [6]. Основная суть метода классификации состоит в следующем. Пусть G – конечная подгруппа в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{K})$. Тогда действие G регуляризуется, т.е. существует гладкое проективное многообразие Z, на котором G действует *бирегулярными* автоморфизмами с эквивариантным бирациональным отображением $Z \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Применив далее эквивариантную программу минимальных моделей, мы получим G-расслоение Мори, которое является либо G-расслоением на коники над $\mathbb{P}^1$, либо G-минимальной поверхностью дель Пеццо. Классифицировав все возможные минимальные группы для расслоений на коники и для поверхностей дель Пеццо, Долгачёв и Исковских получили полную классификацию конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{K})$. Но довольно часто полученные подгруппы являются сопряжёнными в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{K})$, поэтому их естественно отождествить. Несложно видеть, что G-многообразия Z_1 и Z_2 дают сопряжённые подгруппы в том и только том случае, когда есть G-эквивариантное бирациональное отображение $Z_1 \dashrightarrow Z_2$. Поэтому кроме классификации всех рациональных G-расслоений Мори необходимо исследовать также и бирациональные отображения между различными расслоениями.

Действуя таким же образом в трёхмерном случае, можно свести задачу классификации конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{K})$ к задаче описания всех рациональных $G\mathbb{Q}$-расслоений Мори и эквивариантных бирациональных отображений между ними. Эта программа была реализована в некоторых частных случаях: например, классифицированы простые неабелевы группы, вкладывающиеся в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{K})$ ([7], см. также [8], [9]), а также p-элементарные подгруппы $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{K})$ (см. [10]). Нас будет интересовать следующий вопрос: какими должны быть многообразие дель Пеццо степени 4 и конечная минимальная группа, действующая на нём, чтобы не было G-эквивариантного отображения на $\mathbb{P}^3$, квадрику $Q \subset \mathbb{P}^4$, расслоение на коники или поверхности дель Пеццо с *регулярным* действием группы G? Все перечисленные классы многообразий являются более простыми с точки зрения классификации G-расслоений Мори, чем оставшиеся G-многообразия Фано, поэтому вопрос естественный.

В работе мы используем следующие обозначения для групп:

- C_n – циклическая группа порядка n;
- D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$;
- S_n – симметрическая группа степени n;
- G^n – прямое произведение n копий группы G.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 1.6. *Пусть X – G-многообразие дель Пеццо степени 4. Предположим, что X не является G-бирационально эквивалентным $\mathbb{P}^3$ и квадрике в $\mathbb{P}^4$ с регулярным действием группы G, а также G-расслоению Мори над базой положительной размерности. Тогда X является одним из следующих многообразий:*

(i) *пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с $\operatorname{rk}\mathrm{Cl}(X) = 5$. Такое многообразие единственно (см. [5]), а его полная группа автоморфизмов изоморфна $(\mathbb{C}^* \rtimes C_2)^3 \rtimes S_3$. Оно подробно описано в разделе 5;*

(ii) *гладкое пересечение двух квадрик. В этом случае возможны следующие варианты:*

  (i) $\mathrm{Aut}(X) \simeq C_2^5 \rtimes C_5$*;*
  (ii) $\mathrm{Aut}(X) \simeq C_2^5 \rtimes D_{12}$*;*
  (iii) $\mathrm{Aut}(X) \simeq C_2^5 \rtimes D_6$*;*
  (iv) группа $\mathrm{Aut}(X)$ *вкладывается в точную последовательность*

$$0 \to C_2^5 \to \mathrm{Aut}(X) \to S_4 \to 0.$$

В случаях (2, i), (2, ii) *и* (2, iv) *многообразие X единственно с точностью до изоморфизма. В случае* (2, iii) *такие многообразия X образуют однопараметрическое семейство.*

Замечание 1.7. В случаях (2, i)-(2, iv) мы не утверждаем, что $G = \mathrm{Aut}(X)$.

Теорема 1.8. *Пусть X – многообразие из пункта* (2, i) *теоремы 1.6, а $G \simeq C_2^4 \rtimes C_5$. Тогда оно является G-бирационально жёстким, т.е. если есть другое G-расслоение Мори $X' \to Y'$ с G-эквивариантным бирациональным отображением $X \dashrightarrow X'$, то $X' \simeq X$. Как следствие, любое другое G-расслоение Мори даёт нам несопряжённое вложение $G \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{K})$.*

Замечание 1.9. В случаях (1) и (2, ii)-(2, iv) теоремы 1.6 не утверждается, что многообразие X нельзя G-эквивариантно перестроить в $\mathbb{P}^3$, квадрику в $\mathbb{P}^4$ или G-расслоение Мори над базой положительной размерности. Вопрос о существовании таких перестроек для некоторых подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ остаётся открытым.

2 Пересечения двух квадрик и символы Сегре

Пусть X – трёхмерное многообразие дель Пеццо степени 4 (см. определение 1.4). Напомним, что мы предполагаем, что X имеет только терминальные горенштейновы особенности. Хорошо известны следующие факты:

Теорема 2.1. *(см. [4, Corollary 1.7]) Многообразие дель Пеццо X степени 4 является пересечением двух квадрик в $\mathbb{P}^5$.*

Предложение 2.2. *(см., например, [11, Example 10.3.1]) Многообразие дель Пеццо X степени 4 является рациональным.*

Предложение 2.3. *Многообразие дель Пеццо X степени 4 является пересеченим двух гладких квадрик.*

Доказательство. По теореме 2.1 многообразие X является пересечением двух квадрик, обозначим их Q_1 и Q_2. По теореме Бертини общий элемент Q пучка $\langle Q_1, Q_2\rangle$ неособ вне X. Так как $X = Q_1 \cap Q_2$, то Q может иметь особенности только в конечном множестве $\mathrm{Sing}(X)$. Поэтому общий элемент пучка квадрик может быть особым в том и только в том случае, когда Q_1 и Q_2 имеют общую особую точку. В таком случае X является пересечением двух конусов с общей вершиной, поэтому размерность касательного пространства в вершине равна пяти. С другой стороны, размерность касательного пространства в терминальной горенштейновой особой точке на трёхмерном многообразии равна четырём (см. [12, Theorem 1.1]). Противоречие. □

Для описания групп автоморфизмов многообразий дель Пеццо степени 4 рассмотрим более общую ситуацию пересечения двух квадрик произвольной размерности.

Рассмотрим многообразие $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^n$, где Q_1 и Q_2 – различные квадрики, причём квадрика Q_2 неособа. Обозначим через $\mathcal{P}$ пучок квадрик

$$\mathcal{P} = \{Q_{\lambda,\mu} = \lambda Q_1 + \mu Q_2, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

(будем обозначать квадрику и её уравнение, а также матрицу соответствующей квадратичной формы одним символом).

Определение 2.4. *Дискриминантом пучка квадрик $\mathcal{P}$* называется многочлен степени $n+1$ от двух переменных

$$\Delta = \Delta(\lambda, \mu) = \mathrm{Det}(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$$

.

Дискриминант пучка квадрик зависит от выбора порождающих Q_1 и Q_2, однако его корни (с учётом кратностей) определены однозначно, с точностью до автоморфизма $\mathcal{P} \simeq \mathbb{P}^1$.

Пусть $(\bar{\lambda} : \bar{\mu})$ – корень уравнения $\Delta = 0$. Существует такое целое число $d \geq 0$, что все миноры матрицы $Q_{\bar{\lambda}:\bar{\mu}}$ порядка $n+1-d$ зануляются, но не все миноры порядка $n-d$. Обозначим через $l_i, i = 0, 1, ..., d$ минимальную кратность корня $(\bar{\lambda} : \bar{\mu})$ в минорах порядка $n+1-i$, тогда $l_i > l_{i+1}$. Пусть $e_i = l_i - l_{i+1}$, где $0 \leq i \leq d-1$ и $e_d = l_d$.

Определение 2.5. Числа e_i называются *характеристическими числами корня* $(\bar{\lambda} : \bar{\mu})$.

Пусть $(\lambda_i:\mu_i), i=1,2,...,r$ – все корни уравнения $\Delta=0$, $e^i_j, j=0,1,...,d_i$ – их характеристические числа, причём если $i_1<i_2$, то $d_{i_1}\geq d_{i_2}$, а в случае равенства наборы характеристических чисел упорядочены лексикографически.

Определение 2.6. *Символом Сегре* пересечения двух квадрик X (или пучка квадрик $\mathcal{P}$) называется набор чисел

$$\sigma_X=\sigma_P=[(e^1_0...e^1_{d_1}),(e^2_0...e^2_{d_2}),...,(e^r_0...e^r_{d_r})].$$

Замечание 2.7. Будем опускать скобки в символе Сегре, если в них стоит ровно одно число.

Замечание 2.8. Каждому корню дискриминанта (скобке в символе Сегре) соответствует особая квадрика, являющаяся конусом с d-мерной вершиной, где d – количество характеристических чисел, соответствующих данному корню (будем называть это число длиной скобки).

Теорема 2.9. *([13, Chapter XIII, §10, Theorem I]) Два пучка квадрик $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\mathbb{P}^1$, переводящий корни $\Delta_{\mathcal{P}_1}$ в корни $\Delta_{\mathcal{P}_2}$, причём наборы характеристических чисел у соответствующих корней совпадают.*

Таким образом, пучок квадрик однозначно определяется конфигурацией корней уравнения $\Delta=0$ и символом Сегре. Поэтому можно определить нормальную форму пучка квадрик $\mathcal{P}$.

Для произвольного числа e^i_j из символа Сегре многообразия X рассмотрим две $e^i_j\times e^i_j$-матрицы

$$Q_{1,i,j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 & -\frac{\mu_i}{\lambda_i}\\ 0 & ... & 1 & -\frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 1 & -\frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 & ... & 0\\ -\frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix},\ Q_{2,i,j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1\\ 0 & ... & 0 & 1 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 1 & 0 & ... & 0\\ 1 & 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}.$$

Следствие 2.10. *Можно выбрать однородные координаты в $\mathbb{P}^5$ таким образом, что в них матрицы Q_1 и Q_2 имеют блочно-диагональный вид*

$$Q_1=\mathrm{Diag}(Q_{1,1,1},...,Q_{1,r,d_r}),\ Q_2=\mathrm{Diag}(Q_{2,1,1},...,Q_{2,r,d_d}).$$

Теперь вернёмся к ситуации трёхмерного многообразия дель Пеццо X степени 4. Мы знаем, что оно является пересечением двух квадрик, одна из которых неособа, поэтому ему можно сопоставить его символ Сегре.

Предложение 2.11. *Пусть X является многообразием дель Пеццо степени 4. Тогда любая скобка в символе Сегре многообразия X содержит не более двух характеристических чисел, а любая скобка из двух чисел имеет вид $(a,1)$.*

Доказательство. Действительно, если в какой-то скобке содержится более двух чисел, то квадрика, соответствующая корню дискриминанта с этим набором характеристических чисел, является конусом над коникой с двумерной вершиной. Это вершина пересекается с другой квадрикой из пучка по кривой особых точек, что противоречит терминальности X. Любой скобке вида (a,b), соответствует конус над неособой квадратичной поверхностью с одномерной вершиной. Простая проверка (см. следствие 2.10) показывает, что если $b>1$, то эта вершина целиком лежит на X, что даёт прямую особых точек. □

Замечание 2.12. Если же все скобки в символе Сегре многообразия X имеют вид (a) или $(a,1)$, то несложно проверить, что особыми точками на X будут вершины конусов, соответствующих скобкам вида (a), $a>1$, и точки пересечения одномерных вершин конусов, соответствующих скобкам длины 2, с другой квадрикой из пучка (для скобок вида $(1,1)$ пересечение состоит из двух точек, для скобок вида $(a,1)$, $a>1$ – из одной). В частности, пересечение двух квадрик неособо тогда и только тогда, когда его символ Сегре равен $[1,1,1,1,1,1]$.

Замечание 2.13. Кроме того, существует ровно одно многообразие с символом Сегре $[(1,1),(1,1),(1,1)]$. Несложно проверить (например, написав явные уравнения, см. следствие 2.10), что оно совпадает с многообразием из пункта 1 теоремы 1.6.

Теорема 2.14. *Пусть X – трёхмерное многообразие дель Пеццо степени 4. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ вкладывается в точную последовательность*

$$0\to \mathrm{Aut}(X)'\to \mathrm{Aut}(X)\to \mathrm{Aut}(X)''\to 0,$$

где группа $\mathrm{Aut}(X)'$ действует на $\mathbb{P}^5$, сохраняя каждую квадрику из пучка, а $\mathrm{Aut}(X)''$ – группа автоморфизмов $\mathbb{P}^1$, переводящая каждый корень дискриминанта в корень дискриминанта с тем же набором характеристических чисел.

Доказательство. Это простое следствие из теоремы 2.9. □

Далее мы рассмотрим многообразие дель Пеццо X степени 4 с действием G – такой конечной подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$, что многообразие X является G-минимальным.

Теорема 2.15. *Пусть X – G-многообразие дель Пеццо. Предположим, что X не является G-бирационально эквивалентным $\mathbb{P}^3$, квадрике в $\mathbb{P}^4$ и G-эквивариантному расслоению Мори с базой положительной размерности. Тогда символ Сегре X равен $[1,1,1,1,1,1]$ или $[(1,1),(1,1),(1,1)]$.*

Доказательство. Согласно утверждению 2.11, символ Сегре многообразия X имеет только скобки вида (a) или $(a,1)$.

Лемма 2.16. *Если в символе Сегре многообразия X есть ровно одна скобка вида $(n), n>1$ (соотв., $(n,1)$), то X является G-бирационально эквивалентным квадрике в $\mathbb{P}^4$ (соотв., G-расслоению на коники).*

Доказательство. Рассмотрим случай скобки вида (n). Обозначим соответствующий ей конус через Q_1, а его вершину через p. Тогда точка p является особой G-инвариантной точкой многообразия X. Рассмотрим проекцию из этой точки. Общая прямая, лежащая на Q_1 и проходящая через p, пересекается с другой квадрикой Q_2 (которую можно считать гладкой) в двух точках, одна из которых p. В противном случае, любая образующая конуса либо целиком лежит на Q_2, либо имеет пересечение кратности 2 в точке p. Таким образом, любая образующая конуса Q_1 лежит на касательной плоскости в точке p к Q_2, чего быть не может. Таким образом, проекция из точки p является G-эквивариантным бирациональным отображением на гиперповерхность степени 2 в $\mathbb{P}^4$.

Пусть теперь скобка имеет вид $(n,1)$. Обозначим соответствующий ей конус через Q_1, а его вершину через l (она является прямой). Рассмотрим проекцию из l. Образом этой проекции будет неособая квадрика $Q'_1 \subset \mathbb{P}^3$ – основание конуса Q_1. Общая плоскость, проходящая через l, пересекает Q_2 по неособой конике. Действительно, если бы сечение общей плоскостью имело особенность, то по теореме Бертини это была бы точка пересечения l с Q_2. Тогда общее сечение было бы парой прямых, проходящих через $l \cap Q_2$, а это означает, что Q_2 – конус с вершиной в $l \cap Q_2$. Противоречие. Таким образом, проекция из l даёт нам структуру G-расслоения на коники над Q'_1. Разрешив его особенности и применив эквивариантную относительную программу минимальных моделей, мы получаем искомое G- расслоение Мори на коники. □

Таким образом, можно считать, что любая скобка кроме (1) либо не входит в символ Сегре, либо входит более одного раза. Перечислим все возможные символы Сегре, удовлетворяющие этому свойству, учитывая, что сумма всех чисел в символе Сегре равна шести:

$$[1,1,1,1,1,1],\ [2,2,1,1],\ [2,2,2],\ [3,3],\ [(1,1),(1,1),1,1],$$

$$[(1,1),(1,1),(1,1)],\ [(2,1),(2,1)].$$

Если символ Сегре многообразия X равен $[2,2,1,1], [3,3]$ или $[(2,1),(2,1)]$, то X содержит ровно две особые точки, причём прямая l, проходящая через них, содержится в X (это делается явной проверкой, соответствующие уравнения описаны в следствии 2.10) и является G-инвариантной, а само X является пересечением двух конусов с вершинами в этих точках. Обозначим эти конуса через Q_1 и Q_2. Проекция из прямой l даёт бирациональное $\bar{G}$-отображение на $\mathbb{P}^3$. Действительно, рассмотрим общую плоскость, содержащую l. Её пересечение с Q_i равно $l + l_i$. Для общей плоскости прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке, не лежащей на l, что и требовалось доказать.

Если символ Сегре равен $[2,2,2]$, то X содержит ровно три особые точки, причём плоскость, проходящая через них, содержится в X (это также делается явной проверкой с помощью следствия 2.10). Таким образом, многообразие X содержит G-инвариантную плоскость и не может быть G-минимальным.

Наконец, если символ Сегре равен $[(1,1),(1,1),1,1]$, то X содержит 4 особые точки. Они не лежат на одной плоскости, что видно из уравнений X, см. следствие 2.10. Рассмотрим проекцию из трёхмерного проективного пространства, порождённого этими точками. Мы получаем G-эквивариантное расслоение над $\mathbb{P}^1$ на рациональные поверхности, являющиеся пересечиями двух квадрик. Применив эквивариантное разрешение особенностей расслоения, а затем эквивариантную относительную программу минимальных моделей, мы получим G-расслоение Мори на коники или поверхности дель Пеццо. □

3 Факты об особенностях линейных систем

Пусть X – трёхмерное многообразие с не более чем терминальными особенностями, G – конечная группа, действующая на X, причём X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано. Более того, мы считаем, что канонический дивизор K_X является дивизором Картье (поскольку нам потребуются исключительно приложения к пересечениям двух квадрик). Пусть $X' \to Y'$ – другое G-расслоение

Мори. Предположим, что существует бирациональное G-эквивариантное отображение $f : X \dashrightarrow X'$.

Существует метод, позволяющий разложить f в композицию элементарных отображений, называемых линками Саркисова (подробности см. в [14]). Для этого выберем очень обильный G-инвариантный дивизор M' на X' и положим $\mathcal{M} = f_*^{-1}(|M'|)$. Ввиду того, что X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано, существует такое рациональное число μ, что $\mathcal{M} \subset |-\mu K_X|$. Если X' не изоморфно X, то неравенства Нётера-Фано-Исковских (см. [14, Theorem 2.4]) дают нам неканоничность пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$. Поэтому для доказательства бирациональной жёсткости X достаточно описать все возможные неканонические центры пар вида $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$, и для каждого неканонического центра описать соответствующий линк Саркисова. Если все полученные линки дают многообразие, изоморфное X, то оно является бирационально жёстким. Для описания нульмерных неканонических центров пар нам понадобится следующая теорема:

Теорема 3.1. *(см., например, [14, Lemma 1.10]) В этих условиях пусть точка $p \in X$ – центр неканонической особенности пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$. Пусть $Z = M_1 \cdot M_2$ – цикл, являющийся пересечением двух общих элементов линейной системы $\mathcal{M}$. Тогда $\mathrm{mult}_p Z > 4\mu^2$.*

Для изучения неканонических центров, являющихся кривыми, нам понадобится следующее утверждение:

Предложение 3.2. *(см., например, [15, Exercise 6.18]) В наших условиях пусть неприводимая кривая C является центром неканонической особенности пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$. Тогда кратность $\mathcal{M}$ вдоль кривой C больше μ.*

В случае неканонического центра, являющегося гладкой кривой, для описания связанного с ней линка Саркисова необходима следующая теорема:

Теорема 3.3. *(см., например, [16, Proposition 1.2]) Пусть Y и X трёхмерные нормальные многообразия, а $f : E \subset Y \to C \subset X$ – дивизориальное стягивание неприводимого дивизора E на кривую C. Предположим, что $\dim f(Y^{\mathrm{sing}}) = 0$, многообразие X имеет изолированные особенности, а $-E$ является f-обильным. Тогда Y изоморфно раздутию X вдоль C.*

В частности, условия теоремы 3.3 выполнены в случае, когда многообразия X и Y имеют не более чем терминальные особенности, а f является стягиванием Мори.

4 Гладкие пересечения двух квадрик

Пусть X – гладкое пересечение двух квадрик. Это равносильно тому, что символ Сегре X равен $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$. В этом случае можно считать, что

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i^2,\ Q_2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2,$$

где все λ_i различны, а $x_i,\ 1 \leq i \leq 6$ – некоторая система координат. Группа $\mathrm{Aut}(X)'$ (в обозначениях теоремы 2.14) изоморфна $(C_2)^5$ и действует обращением знаков у координат $x_1, ..., x_5$. Группа $\mathrm{Aut}(X)''$ является группой автоморфизмов $\mathbb{P}^1$, сохраняющих множество из шести точек $S = \{(\lambda_i : 1) \mid i = 1, ..., 6\}$.

В общем случае эта группа тривиальна. Перечислим все случаи (с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^1$), в которых она нетривиальна:

(i) $S = \{T_0T_1(T_0^4 - T_1^4) = 0\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq S_4$.

(ii) $S = \{T_0^6 + T_1^6 = 0\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq D_{12}$.

(iii) $S = \{T_0^6 + aT_0^3T_1^3 + T_1^6 = 0\}, a \neq -2, 0, 2$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq D_6$.

(iv) $S = \{T_0T_1(T_0^4 + aT_0^2T_1^2 + T_1^4) = 0\}, a \neq -2, 0, 2$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq D_4$.

(v) $S = \{T_0(T_0^5 + T_1^5) = 0\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq C_5$.

(vi) $S = \{(T_0^2 + T_1^2)(T_0^2 + aT_1^2)(T_0^2 + bT_1^2) = 0\}, a, b \neq -1, 0, 1, a \neq b$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq C_2$.

Этот список можно получить из классификации конечных подгрупп $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ и полуинвариантных бинарных форм относительно действия этих групп (см. [6, §5.5]) аналогично [6, §6.4].

Лемма 4.1. *В случаях (4) и (6), а также в случае тривиальной группы* $\mathrm{Aut}(X)''$*, многообразие* X *является* G*-бирационально эквивалентным* G*-расслоению на поверхности дель Пеццо для любой подгруппы* $G \subset \mathrm{Aut}(X)$.

Доказательство. В этих случаях в S есть одна, две или четыре орбиты, состоящие в совокупности из 4 точек, поэтому в $\mathbb{P}^5$ есть инвариантное трёхмерное подпространство, порождаемое вершинами соответствующих конусов (они имеют координаты $x_i = \delta_i^j$ для различных j). Проекция из него даёт искомое G-расслоение. □

Таким образом, для доказательства теоремы 1.6 в случае гладкого многообразия X осталось проверить структуру группы $\mathrm{Aut}(X)$ в случаях (2), (3) и (5). Зная уравнения многообразия X, в этих случаях легко явно указать образующие $\mathrm{Aut}(X)$ и проверить, что $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(X)' \rtimes \mathrm{Aut}(X)''$. В случае (1) не существует расщепляющего гомоморфизма $\mathrm{Aut}(X)'' \to \mathrm{Aut}(X)$, поскольку можно явно проверить, что у элемента $\mathrm{Aut}(X)''$ порядка 4 не существует прообраза в $\mathrm{Aut}(X)$ порядка 4.

Докажем ещё следующую полезную лемму:

Лемма 4.2. *Пусть* X *– гладкое пересечение двух квадрик в* $\mathbb{P}^5$*. Пусть* G *– подгруппа* $\mathrm{Aut}(X)$*, имеющая неподвижную точку на* X*. Тогда* X *является* G*-эквивалентным* G*-расслоению на квадрики.*

Доказательство. Пусть $\pi : \widetilde{X} \to X$ – раздутие X в неподвижной точке. Тогда $\widetilde{X}$ является гладким G-многообразием дель Пеццо степени 3. Действительно, пусть C – произвольная кривая на $\widetilde{X}$. Если C лежит на E, то $C \cdot K_{\widetilde{X}} < 0$. В противном случае

$$C \cdot K_{\widetilde{X}} = \pi(C) \cdot K_X + 2C \cdot E = -2 \deg \pi(C) + 2 \,\mathrm{mult}_p\, C \leq 0.$$

Более того, равенство достигается только в случае, когда $\pi(C)$ – прямая. Таким образом, численная эффективность $-K_{\widetilde{X}}$ доказана, а его объёмность очевидна. Антиканоническая линейная система оботражает $\widetilde{X}$ на кубическую гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, содержащую G-инвариантную плоскость. Проекция из неё даёт искомую структуру G-расслоения на квадрики. □

В следующем разделе мы покажем, что в случае (5) пересечение двух квадрик является бирационально жёстким относительно группы $C_2^4 \rtimes C_5$, а значит и относительно всей группы $\mathrm{Aut}(X)$. Остаётся открытым вопрос, есть ли в случаях (1)-(3) подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$, относительно которых X является бирационально жёстким? Большую часть подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$ можно отбросить, используя леммы 4.1 и 4.2, но, к сожалению, не все.

4.3 Случай $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq C_5$

Разберём теперь подробнее случай (5). В этом случае X можно задать системой уравнений

$$\xi x_1^2 + \xi^2 x_2^2 + \xi^3 x_3^2 + \xi^4 x_4^2 + x_5^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0,$$

где ξ – корень пятой степени из 1. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна полупрямому произведению $(C_2)^5 \rtimes C_5 \simeq C_2 \times (C_2^4 \rtimes C_5)$, причём $(C_2)^5$ действует сменой знаков у $x_1, ..., x_5$, а C_5 переставляет эти координаты по циклу.

Предложение 4.4. *Группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *имеет следующие подгруппы:*

$$\{e\},\ C_2,\ C_2^2,\ C_2^3,\ C_2^4,\ C_2^5,\ C_5,\ C_{10},\ C_2^4 \rtimes C_5,\ C_2^5 \rtimes C_5.$$

Доказательство. Для произвольной подгруппы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ положим $G' = G \cap \mathrm{Aut}(X)'$ и $G'' = \pi(G)$, где $\pi : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)''$ – стандартная проекция (в обозначениях теоремы 2.14). Если G'' тривиальна, то $G = G' \simeq (C_2)^n$.

Предположим теперь, что $G'' = C_5$. Рассмотрим произвольный элемент нашей подгруппы порядка 5. Несложно показать, что с помощью сопряжения элементом из $(C_2)^5$ его можно перевести в элемент, переставляющий координаты по циклу без смены знаков. Отождествим группу $(C_2)^5$ с векторным пространством $\mathbb{F}_2^5$ над полем $\mathbb{F}_2$, на этом пространстве задано тавтологическое представление группы C_5. Подгруппа G' соответствует подпредставлению, которых ровно 4: нульмерное, тривиальное одномерное (порожденное вектором $(1,1,1,1,1)$), ортогональное ему четырёхмерное и пятимерное. Следовательно, с точностью до сопряжения $\mathrm{Aut}(X)$ содержит четыре таких подгруппы: C_5, $C_5 \times C_2$, $(C_2)^4 \rtimes C_5$, G. Более того, подгруппа, изоморфная $C_2^4 \rtimes C_5$, в группе G ровно одна. □

Предложение 4.5. *Пусть X – гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \simeq C_2^5 \rtimes C_5$. Пусть G – подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфная C_5 или C_{10}. Тогда X является G-бирационально эквивалентным G-расслоению на квадрики.*

Доказательство. Это немедленно следует из леммы 4.2. □

Обозначим подгруппу $C_2^4 \rtimes C_5 \subset \mathrm{Aut}(X)$ через G, а нормальную подгруппу $C_2^4 \subset \mathrm{Aut}(X)$ через G'.

Лемма 4.6. *Пусть $Y \subset X$ – сечение X гиперплоскостью $x_6 = 0$, а $Z \subset X$ – сечение X гиперплоскостью $x_i = 0$, $i \neq 6$. Тогда G-орбита точки на Y может иметь длину 16, 20, 40 или 80, а G'-орбита точки на Z состоит из 4, 8 или 16 точек.*

Доказательство. Пусть y – некоторая точка Y, а G_y – её стабилизатор. Если в G_y есть элемент порядка 5, то первые пять координат y ненулевые, поэтому никакой элемент G' в стабилизаторе лежать не может, и орбита y имеет длину 16. Если G_y не содержит элементов порядка 5, то $G_y \subset G'$. Поскольку среди координат y не менее трёх ненулевых, то мощность G_y равна 1, 2 или 4. Вторая часть утверждения доказывается аналогично. □

Теорема 4.7. *Пусть X – гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \simeq C_2^5 \rtimes C_5$. Пусть $G \simeq C_2^4 \rtimes C_5$ – подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда X является G-бирационально жёстким.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} \subset |-\mu K_X|$ – некоторая G-инвариантная линейная система без неподвижных компонент. Докажем сначала, что точка не пожет быть неканоническим центром пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{H})$. Предположим противное – пусть точка

$$p = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6) \in X$$

является неканоническим центром. Из уравнений многообразия X легко выводится, что среди чисел p_i как минимум три не равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что $p_1 \neq 0$ и $p_2 \neq 0$. Тогда точки

$$(\pm p_1 : \pm p_2 : \pm p_3 : p_4 : p_5 : p_6),$$

где количество минусов чётно, лежат в G-орбите p, поэтому тоже являются неканоническими центрами. Все эти 4 точки лежат на двумерной плоскости S, которая не имеет других точек пересечения с X. Рассмотрим общую гиперплоскость H, содержащую S, и два общих элемента линейной системы $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Пусть $Z = H_1 \cdot H_2$. Из того, что $S \cap X$ нульмерно следует, что H не содержит компонент Z. Тогда

$$16\mu^2 = H \cdot Z \geq 4 \operatorname{mult}_p Z > 16\mu^2,$$

где последнее неравенство следует из теоремы 3.1. Полученное противоречие показывает, что точка не может быть неканоническим центром.

Пусть $L = L_1$ – неприводимая кривая, являющаяся неканоническим центром, $d = \deg L_1$ – её степень, а $\{L_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ – её G-орбита. Пусть H – достаточно общее гиперплоское сечение X, а H_1 и H_2 – общие элементы $\mathcal{H}$. Тогда

$$16\mu^2 = H \cdot H_1 \cdot H_2 \geq (\operatorname{mult}_L \mathcal{H})^2 H \cdot L > \mu^2 rd.$$

Из этого следует, что $rd \leq 15$. Поскольку r является индексом некоторой подгруппы G, то (см. утверждение 4.4) r может быть равным 1, 5 или 10.

Предположим, что $r = 5$. В таком случае кривая L_1 сохраняется группой G', а её степень не превосходит 3. Выберем такое $1 \leq i \leq 5$, что L_1 не лежит в гиперплоскости $\{x_i = 0\}$. Тогда пересечение L_1 с этой гиперплоскостью является множеством из не более чем трёх точек, инвариантным относительно G'. Согласно лемме 4.6, такого не может быть. Противоречие.

Пусть $r = 10$. В этом случае $d = 1$. Без ограничения общности можно считать, что L_1 и L_2 образуют G'-орбиту. Найдётся такое i, что L_1 и L_2 не лежат на гиперплоскости $\bar{H} = \{x_i = 0\}$, иначе L_1 или L_2 лежала бы на плоскости $\{x_i = x_j = x_k = 0\}$ для некоторых различных i, j, k, но пересечение этой плоскости с X состоит из 4 точек. Тогда $(L_1 \cup L_2) \cap \bar{H}$ является парой точек, инвариантной относительно G', чего не может быть.

Остался последний случай $r = 1$. В этом случае L не лежит в гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$. Пересечение L с гиперплоскостью $\{x_1 = 0\}$ является G'-инвариантным множеством, поэтому из леммы 4.6 следует, что степень кривой может быть равна 4, 8 или 12. Кроме того, L лежит в гиперплоскости $\bar{H} = \{x_6 = 0\}$, поскольку иначе их пересечение было бы G-инвариантным конечным подмножеством $\bar{H}$, но минимальная мощность орбиты в этом случае равна $16 > d$ (см. лемму 4.6). Легко понять, что в подпространстве размерности меньше 4 кривая L не лежит, поскольку соответствующее пятимерное представление G неприводимо. Поэтому кривая L не может иметь степень 4.

Кривая L является G-инвариантной кривой на поверхности дель Пеццо $\bar{H}$. Пусть M и $M_i, 1 \leq i \leq 5$ – стандартный базис группы Пикара поверхности $\bar{H}$, где M_i – непересекающиеся (-1)-кривые, а M – класс собственного прообраза прямой в $\mathbb{P}^2$ (напомним, что любая поверхность дель Пеццо степени 4 является раздутием $\mathbb{P}^2$ в пяти точках). Пусть N – любая (-1)-кривая на $\bar{H}$, тогда $L \cdot N$ не зависит от N, поскольку L является G-инвариантной, а G' действует на множестве (-1)-кривых транзитивно. Действительно, пусть элемент $g \in G'$ сохраняет некоторую (-1)-кривую, которая в нашем случае является прямой в $\mathbb{P}^4$. Элемент g меняет знаки у двух или четырёх координат, во втором случае его неподвижные точки лежат на сечении $\bar{H}$ координатной гиперплоскостью, в первом – на сечении $\bar{H}$ координатным подпространством коразмерности 2. Действие g на прямой имеет две неподвижные точки, поэтому прямая обязана целиком лежать на сечении $\bar{H}$ координатной гиперплоскостью, чего не может быть, поскольку это сечение является неприводимой кривой степени 4.

Поскольку индекс пересечения со всеми (-1)-кривыми один и тот же, то

$$L = aM - b\sum M_i$$

для некоторого натурального a и неотрицательного целого b. Пересечём теперь L с (-1)-кривой с классом $N = M - M_1 - M_2$ и с гиперплоским сечением (его класс равен $-K_{\bar{H}} = 3M - \sum M_i$). Получаем

$$b = a - 2b,\ 3a - 5b = d.$$

Откуда выводим, что

$$a = 3b,\ b = \frac{d}{4}.$$

Таким образом, $L = -\frac{d}{4}K_{\bar{H}}$. Докажем, что L является полным пересечением $\bar{H}$ с гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ степени $\frac{d}{4}$.

Любой дивизор из линейной системы $|-K_{\bar{H}}|$ является гиперплоским сечением, поскольку наше вложение $\bar{H} \subset \mathbb{P}^4$ является каноническим. Применив формулу Римана-Роха и теорему Кодаиры о занулении к дивизорам $-K_{\bar{H}}$, $-2K_{\bar{H}}$ и $-3K_{\bar{H}}$, получаем

$$5 = h^0(-K_{\bar{H}}) = \frac{-K_{\bar{H}} \cdot (-K_{\bar{H}} - K_{\bar{H}})}{2} + \chi(\mathcal{O}) = 4 + \chi(\mathcal{O}),$$

$$h^0(-2K_{\bar{H}}) = \frac{-2K_{\bar{H}} \cdot (-2K_{\bar{H}} - K_{\bar{H}})}{2} + \chi(\mathcal{O}) = 12 + \chi(\mathcal{O}),$$

$$h^0(-3K_{\bar{H}}) = \frac{-3K_{\bar{H}} \cdot (-3K_{\bar{H}} - K_{\bar{H}})}{2} + \chi(\mathcal{O}) = 24 + \chi(\mathcal{O}).$$

Отсюда получаем, что

$$h^0(-2K_{\bar{H}}) = 13,\ h^0(-3K_{\bar{H}}) = 25,$$

что совпадает с размерностями пространств сечений $\bar{H}$ квадратичными и кубическими гиперповерхностями соответственно.

Мы получили, что $L = \bar{H} \cap \{S = 0\}$, где S – квадратичный или кубический многочлен. Напомним, что $\bar{H}$ задано уравнениями

$$Q_1 = \xi x_1^2 + \xi^2 x_2^2 + \xi^3 x_3^2 + \xi^4 x_4^2 + x_5^2 = 0,\ Q_2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0.$$

Если многочлен S кубический, то, прибавив к S многочлен вида $Q_1P_1 + Q_2P_2$ для некоторых линейных многочленов P_i, можно добиться того, что коэффициенты при мономах $x_i^2 x_{i\pm 1},\ 1 \leq i \leq 6$ (мы отождествляем x_0 с x_6 и x_7 с x_1) обнулятся, причём многочлены P_i единственны (это несложно проверить, написав явные уравнения на неизвестные коэффициенты многочленов P_i). Полученное уравнение является G-полуинвариантным, чего не бывает для кубических многочленов.

Пусть многочлен S квадратичный. В этом случае можно считать, что S полуинвариантен относительно действия группы G (возможно, после прибавления к нему $p_1Q_1 + p_2Q_2$ для некоторых p_i). В таком случае легко проверить, что S имеет вид

$$\zeta x_1^2 + \zeta^2 x_2^2 + \zeta^3 x_3^2 + \zeta^4 x_4^2 + x_5^2,$$

где ζ – корень пятой степени из единицы, отличный от ξ. В частности, кривая L неособа. По теореме 3.3, соответствующий линк Саркисова происходит из раздутия кривой L. Обозначим это раздутие через $f : \widetilde{X} \to X$, через $\widetilde{H}$ обозначим собственный прообраз $\bar{H}$, а через E – исключительный дивизор. На конусе Мори $\mathrm{NE}(\widetilde{X})$ есть два экстремальных луча, стягивание первого даёт морфизм f, обозначим второй луч через R. Рассмотрим произвольную кривую C на $\widetilde{H}$. Тогда

$$C \cdot K_{\widetilde{X}} = C \cdot (f^*K_X + E) = f(C) \cdot K_X + C \cdot E = -2\deg C + f(C) \cdot L = 0,$$

где последний индекс пересечения рассматривается на $\bar{H}$. Аналогично показывается, что для произвольной кривой $C \subset \widetilde{X}$ индекс пересечения $C \cdot K_{\widetilde{X}} \leq 0$. Таким образом, $K_{\widetilde{X}} \cdot R = 0$, но стягивание R малым не является, поэтому раздутие L не даёт линка Саркисова (см. [14]). Таким образом, линейная система $\mathcal{H}$ не имеет неканонических центров, и теорема доказана. □

Замечание 4.8. Группа G может действовать на других расслоениях Мори, например на $Y \times \mathbb{P}^1$, где Y – поверхность дель Пеццо степени 4 с группой автоморфизмов $C_2^4 \rtimes D_{10}$ (см. [6]). Таким образом, группа $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{K})$ содержит как минимум две несопряжённые подгруппы, изоморфные G.

5 Пересечения двух квадрик с максимальным рангом $\mathrm{Cl}(X)$

Пусть X – пересечение двух квадрик с символом $[(1,1),(1,1),(1,1)]$. Многообразие такого типа единственно. Можно считать, что X задано уравнениями

$$Q_1 = x_1x_2 + \xi x_3x_4 + \xi^2 x_5x_6 = 0,\ Q_2 = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0,$$

где ξ – кубический корень из 1.

Множество особых точек X состоит из шести обыкновенных двойных точек $\{x_i = \delta_i^j\}$ для $j = 1, ..., 6$, $r = 5$, группа $\mathrm{Cl}(X)$ порождается плоскостями, лежащими на X (всего их 8, а их уравнения имеют вид $x_i = x_j = x_k = 0$, где $i \in \{1,2\}$, $j \in \{3,4\}$, $k \in \{5,6\}$), ранг группы $\mathrm{Cl}\, X$ равен пяти, более того, это единственное пересечение двух квадрик с $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}\, X \geq 5$ (см. [5]).

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Aut}}(X) \longrightarrow 0,$$

где $\mathrm{Aut}^0(X)$ – ядро действия на $\mathrm{Cl}(X)$, а группа $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ действует эффективно на $\mathrm{Cl}(X)$. Группа $\mathrm{Aut}^0(X)$ действует тривиально на множестве плоскостей, а следовательно и на множестве особых точек. Из этого нетрудно вывести, что она является трёхмерным тором. Согласно [5, Corollary 7.4, Corollary 7.5 (i)], группа $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ содержится в $W(\Delta'') \simeq C_2 \times S_4$ (где $W(\Delta'')$ – группа Вейля некоторой системы корней, канонически связанной с X, подробности см. в [5]). С другой стороны, группа $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ содержит элементы, меняющие местами координаты x_{2i-1} и x_{2i}, $1 \leq i \leq 3$, и элементы

$$g_1 : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) \mapsto (x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_1 : x_2),$$

$$g_2 : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) \mapsto (x_1 : x_2 : \xi x_5 : \xi x_6 : \xi^2 x_3 : \xi^2 x_4),$$

которые в совокупности порождают подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфную $C_2^3 \rtimes S_3 \simeq C_2 \times S_4$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(X) \simeq (\mathbb{C}^*)^3 \rtimes (C_2^3 \rtimes S_3)$. Для нас будет удобно рассматривать $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ как подгруппу в S_6 (группе перестановок x_i) со следующими порождающими:

$$h_1 = (1324),\ h_2 = (12),\ h_3 = (56),\ h_4 = (135)(246).$$

Теорема 5.1. *Пусть многообразие X является G-минимальным для некоторой конечной подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда G вкладывается в следующую точную последовательность:*

$$0 \to C_k \times C_l \times C_m \to G \to G' \to 0,$$

где $G' \subset \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ – одна из следующих групп:

$$C_4,\ C_2^2,\ C_4 \times C_2,\ D_8,\ C_2^3,\ D_8 \times C_2,\ S_4,\ C_2^3 \rtimes C_3,\ C_2^3 \rtimes S_3,$$

а k, l, m – натуральные числа (возможно, равные единице). Во всех случаях, кроме D_8, группа G' единственна с точностью до сопряжения в $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, есть ровно три класса сопряжённости в случае $G' \simeq D_8$.

Доказательство. Рассмотрим действие G на множестве плоскостей. Это множество либо состоит из одной орбиты, либо разбивается на две орбиты, состоящие из плоскостей, лежащих в гиперплоскостях $x_{2i-1} = 0$ и $x_{2i} = 0$ соответственно (поскольку сумма плоскостей в каждой орбите должна быть пропорциональна каноническому классу), без ограничения общности можно ситать, что $i = 3$.

Рассмотрим отображение $\pi : G \to \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, являющееся ограничением отображения $\mathrm{Aut}(X) \to \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, и обозначим через G' его образ. В ядре отображения π находится конечная подгруппа $(\mathbb{C}^*)^3$, поэтому ядро изоморфно

$C_k \times C_l \times C_m$. Группа G' также минимальна. Классифицируем все возможные минимальные подгруппы $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ с точностью до сопряжения.

Сначала предположим, что мы в ситуации, когда множество плоскостей разбивается на две орбиты. Тогда G' лежит в D_8 – подгруппе $\langle g_1, g_2\rangle \subset \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$. Минимальная подгруппа должна иметь порядок 4 или 8. Явной проверкой можно убедиться, что минимальными являются следующие подгруппы:

$$A_1 = \langle g_1\rangle,\ A_2 = \langle g_1^2,\ g_2\rangle,\ A_3 = \langle g_1, g_2\rangle.$$

Теперь рассмотрим случай, когда все плоскости лежат в одной орбите, но порядок G' не делится на 3. Тогда без ограничения общности можно считать, что $G' \subset \langle g_1, g_2, g_3\rangle \simeq D_8 \times C_2$ (так как все силовские 2-подгруппы сопряжены этой, а нас интересуют подгруппы с точностью до сопряжения). В этом случае G' является одной из следующих групп:

$$A_4 = \langle g_1, g_3\rangle,\ A_5 = \langle g_1^2, g_2, g_3\rangle,\ A_6 = \langle g_1, g_2, g_3\rangle,$$
$$A_7 = \langle g_1 g_3, g_2\rangle,\ A_8 = \langle g_1, g_2 g_3\rangle.$$

Теперь рассмотрим случай, когда все плоскости лежат в одной орбите, и порядок G' делится на 3. Тогда либо G' совпадает с $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, либо является подгруппой индекса 2. Среди трёх подгрупп индекса 2 ровно две являются минимальными:

$$A_9 = \langle g_1, g_2 g_3, g_4\rangle,\ A_{10} = \langle g_1^2, g_2, g_3, g_4\rangle.$$

$\square$

Предложение 5.2. *Если в обозначениях теоремы 5.1 группа G' не содержит элемента третьего порядка, то многообразие X является G-эквивалентным G-расслоению Мори на коники или поверхности дель Пеццо.*

Доказательство. В этом случае G' сопряжена подгруппе A_i для некоторого $i < 9$. Из явного описания этих групп с помощью образующих видно, что множество из четырёх точек

$$(1:0:0:0:0:0), (0:1:0:0:0:0), (0:0:1:0:0:0), (0:0:0:1:0:0)$$

является G-инвариантным. Следовательно, проекция из подпространства $\{x_5 = x_6 = 0\}$ задаёт G-эквивариантное расслоение на рациональные поверхности. Применив эквивариантные разрешение особенностей и относительную программу минимальных моделей, получим искомое расслоение. $\square$

Таким образом, если многообразие X является G-бирационально жёстким, то либо G' совпадает с $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, либо сопряжена A_9 или A_{10}, то есть G принадлежит одному из трёх семейств подгрупп.

Замечание 5.3. В этих случаях можно более точно описать группу $G'' = \ker(G \to G')$: для некоторого m имеется вложение $C_m^3 \subset G'' \subset C_{2m}^3$, причём G'' инвариантна относительно естественного действия группы C_3. Для каждого m таких подгрупп ровно четыре. Это несложно получить из того, что G'' должна быть инвариантна относительно действия G' сопряжениями.

Остаётся открытым вопрос, для каких именно подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$ многообразие X является бирационально жёстким. Например, является ли оно бирационально жёстким относительно всей группы $\mathrm{Aut}(X)$?

Список литературы

[1] D. Abramovich, J. Wang, Equivariant resolution of singularities in characteristic 0, Math. Res. Lett. 4:2-3 (1997), 427–433

[2] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Amer. Math. Soc. 1:1 (1988), 117–253

[3] J. Kollar, S. Mori, Birational geometry of algebraic varieties, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge, Univ. Press (1998)

[4] T. Fujita, On singular del Pezzo varieties, Algebraic geometry (L'Aquila, 1988), Lecture Notes in Math. 1417, Springer, Berlin (1990), 117–128

[5] Yu. Prokhorov, G-Fano threefolds, I, Adv. Geom., 13:3 (2013), 389–418

[6] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math. 269 (2009), 443–548

[7] Yu. Prokhorov, Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3, J. Alg. Geom., 21:3 (2012), 563–600

[8] I. Cheltsov, C. Shramov, Five embeddings of one simple group, Trans. Amer. Math. Soc., 366:3 (2014), 1289–1331

[9] I. Cheltsov, C. Shramov, Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three, Transform. Groups, 17:2 (2012), 303–350

[10] Yu. Prokhorov, p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3, Classification of algebraic varieties, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2011), 327–338

[11] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, Fano varieties, Algebraic geometry V, Encyclopaedia Math. Sci., Berlin, Springer (1999)

[12] M. Reid, Minimal models of canonical threefolds, Advanced Studies in Pure Mathematics 1, Algebraic Varieties and analytic varieties (1983), 131–180

[13] W.V.D. Hodge, D. Pedoe, Methods of Algebraic Geometry, Vol. II, Cambridge University Press (1952)

[14] A. Corti, Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry, L.M.S. Lecture Note Series, 281 (2000), 259–312

[15] A. Corti, K.E. Smith, J. Kollar, Rational and nearly rational varieties, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 92, Cambridge University Press (2004)

[16] N. Tziolas, Terminal 3-fold divisorial contractions of a surface to a curve I, Comp. Math., 139 (2003), 239–261