

# К распределению нулевых множеств голоморфных функций. IV. Один критерий\*

Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Э. Б. МЕНЬШИКОВА

В более общем виде доказывается анонсированный ранее результат [1, теорема 2].

В соглашениях из [1]–[6] всюду  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  — одноточечная компактификация Александрова комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $S \subset \mathbb{C}_\infty$  — борелевское подмножество;  $\text{int } S$ ,  $\text{clos } S$  и  $\partial S$  — внутренность, замыкание и граница  $S$  в  $\mathbb{C}_\infty$ .

Далее  $\text{Meas}(S)$  — класс вещественных борелевских мер (Радона) на  $S$ , или зарядов,

$$\text{Meas}^+(S) := \{\mu \in \text{Meas}(S) : \mu \geq 0\},$$

$\text{Meas}_c^+(S) \subset \text{Meas}^+(S)$  — класс мер с компактным носителем в  $S$ ,  $\delta_z$  — вероятностная мера Дирака с носителем  $\text{supp } \delta_z = \{z\}$ .

Классы  $\text{sbh}(S)$ ,  $\text{har}(S)$ ,  $\text{Hol}(S)$  состоят соотв.<sup>†</sup> из субгармонических, гармонических и голоморфных функций в какой-нибудь открытой окрестности множества  $S \subset \mathbb{C}_\infty$ ,

$$\text{Hol}(D, M) := \left\{ f \in \text{Hol}(D) : \sup_D |f| \exp(-M) < +\infty \right\}, \quad (1)$$

где  $D \subset \mathbb{C}_\infty$  — область, т. е. открытое связное подмножество,

$$M := M_+ - M_- : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad M_\pm \in \text{sbh}(D), \quad M_\pm \not\equiv -\infty \quad (2)$$

— нетривиальная  $\delta$ -субгармоническая функция [4, 3.1] с зарядом Рисса

$$\nu_M := \frac{1}{2\pi} \Delta M \in \text{Meas}(D), \quad \Delta — оператор Лапласа. \quad (3)$$

Всюду  $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$  — последовательность точек в области  $D$  без предельных точек в  $D$  со считающей мерой

$$n_Z := \sum_k \delta_{z_k}.$$

Выберем

$$\begin{aligned} & \text{число } b > 0, \text{ а также множества} \\ & \emptyset \neq \text{int } S \subset \text{clos } S \subset \text{int } S_0 \subset \text{clos } S_0 \subset D, \text{ где } S \text{ или } \text{int } S_0 \text{ линейно связно.} \end{aligned} \quad (4)$$

Класс вещественных тестовых функций  $\text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b)$  состоит из субгармонических функций  $v \in \text{sbh}(D \setminus S)$ , удовлетворяющих трем условиям [1, (2)]:

\*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

†сокращение для «соответственно»

- 1)  $\lim_{D \ni z' \rightarrow z} v(z') = 0$  для всех  $z \in \partial D$ ;
- 2) существует  $S_v \subset \text{clos } S_v \subset D$ , для которого  $v \geq 0$  на  $D \setminus S_v$ ;
- 3)  $\sup_{S_0 \setminus S} |v| \leq b$ .

Рассматриваем и *финитный* вблизи  $\partial D$  подкласс введенного класса тестовых вещественных функций  $\text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b)$  (ср. с [5, (1.12)])

$$\text{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b) := \{v \in \text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b) : v \equiv 0 \text{ вне некоторого } S_v \subset \text{clos } S_v \subset D\}.$$

**Определение 1** (*аффинного выметания* [5, определение 1], [6, определение 7.1, (7.11)]). Пусть  $S \subset D$ ,  $\mathcal{V}$  — некоторый класс *полу*непрерывных *сверху* функций

$$v: D \setminus S \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}. \quad (5)$$

Рассмотрим заряды  $\nu, \mu \in \text{Meas}(D)$ . Пишем  $\nu \preceq_{S, \nu} \mu$  (соотв.  $Z \preceq_{S, \nu} \mu$ ), если для некоторого числа  $C \in \mathbb{R}$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus S} v \, d\nu &\leq \int_{D \setminus S} v \, d\mu + C \\ \left( \text{соотв. } \sum_{z_k \in D \setminus S} v(z_k) \stackrel{(3)}{:=} \int_{D \setminus S} v \, dn_Z \leq \int_{D \setminus S} v \, d\mu + C \right) &\text{ для всех } v \stackrel{(5)}{\in} \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Теорема 1** (критерий последовательности нулей для  $\text{Hol}(D, M)$ ). Пусть  $D$  односвязная область в  $\mathbb{C}_\infty$  и на  $\partial D$  более одной точки или  $D$  двусвязная в  $\mathbb{C}_\infty$  и на  $\partial D$  более двух точек или  $D$  конечносвязная в  $\mathbb{C}_\infty$  с  $\text{clos } D \neq \mathbb{C}_\infty$ . Пусть функция  $M_+ \stackrel{(2)}{\in} \text{sbh}(D)$  непрерывна, т. е.  $M_+ \stackrel{(2)}{\in} C(D)$ . Тогда следующие три утверждения эквивалентны.

**z1.**  $Z$  — последовательность нулей для  $\text{Hol}(D, M)$ , т. е. существует  $f \in \text{Hol}(D, M)$  с последовательностью нулей  $\text{Zero}_f$ , перенумерованной с учётом кратности, со считающей мерой  $n_{\text{Zero}_f} \stackrel{(3)}{=} n_Z$  (пишем  $\text{Zero}_f = Z$ ).

**z2.** Для любых объектов из (4) имеем  $Z \stackrel{(6)}{\preceq}_{S, \nu_b} \nu_M$  относительно класса

$$\mathcal{V}_b := \text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b). \quad (7)$$

**z3.** Существуют объекты из (4), для которых  $Z \stackrel{(6)}{\preceq}_{S, \nu_b} \nu_M$  относительно класса

$$\mathcal{V}_b := \text{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b) \cap C^\infty(D \setminus S), \quad (8)$$

где  $C^\infty(D \setminus S)$  — класс бесконечно дифференцируемых функций в окрестности  $D \setminus S$ .

Импликация  $\mathbf{z1} \Rightarrow \mathbf{z2}$  для произвольной области  $D \subset \mathbb{C}^n$  с субгармонической функцией  $M$  доказана в [1, теорема 1]. Более общая, чем [1, теорема 1], версия при  $n = 1$  для произвольной уже  $\delta$ -субгармонической функцией  $M \neq \pm\infty$  — это

**Теорема 2.** В условиях (4) пусть  $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$  с мерой Рисса  $\nu_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u$ . Если  $u \leq M$  на  $D$ , то  $\nu_u \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$  относительно класса  $\mathcal{V}_b \stackrel{(7)}{:=} \text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b)$ .

Доказательство теоремы 2 опускаем, поскольку оно по сути повторяет [2, доказательство теорема 1]. Отметим лишь, что предварительно необходимо выбрать точку  $z_0 \in \text{int } S$ , в которой  $u(z_0) \neq -\infty$  и  $M_\pm(z_0) \neq -\infty$ , а также оперировать вместо неравенства  $u \leq M$  неравенством  $u + M_- \leq M_+$ , где в обеих частях субгармонические функции. Роль  $\ln |f|$  из [1, доказательство теоремы 1] будет играть функция  $u + M_-$  с  $M_+$  вместо  $M$ . Тогда  $\nu_{u+M_-} \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_{M_+}$ , откуда по определению 1 следует  $\nu_u \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$ .

Из утверждения  $\mathbf{z1}$  для последовательности  $Z \subset D$  существует  $f \in \text{Hol}(D)$  с  $\text{Zero}_f = Z$ , для которой  $|f| \leq \exp M$  на  $D$ . При  $u := \ln |f| \leq M$  на  $D$  имеем

$$\nu_u = \frac{1}{2\pi}\Delta u = \frac{1}{2\pi}\Delta \ln |f| = n_Z$$

и по теореме 2 получаем  $n_Z \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$ , что по определению 1 означает  $Z \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$ . Таким образом, импликация  $\mathbf{z1} \Rightarrow \mathbf{z2}$  доказана.

Импликация  $\mathbf{z2} \Rightarrow \mathbf{z3}$  очевидна, поскольку класс тестовых функций  $\mathcal{V}_b$  из  $\mathbf{z2}$ (7) включает в себя класс тестовых функций  $\mathcal{V}_b$  из  $\mathbf{z3}$ (8).

Далее для простоты  $\infty \notin D$ , т.е.  $D \subset \mathbb{C}$ . Для точки  $z \in \mathbb{C}$  и числа  $t > 0$  через  $D(z, t) \subset \mathbb{C}$  обозначаем открытый круг с центром  $z$  радиуса  $t$ ,  $\overline{D}(z, t) := \text{clos } D(z, t)$ . Для доказательства импликации  $\mathbf{z3} \Rightarrow \mathbf{z1}$  теоремы 1 будет использованы следующие

**Теорема 3.** Пусть в условиях (4) без линейной связности граница  $\partial D$  неполярная, а также задана мера  $\nu \in \text{Meas}^+(D)$ . Если  $\nu \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$  относительно класса тестовых функций  $\mathcal{V}_b$  из  $\mathbf{z3}$ (8), то для любой положительной функции  $r: D \rightarrow \mathbb{R}$  с ограничениями

$$\inf_{\overline{D}(z, t)} r > 0 \text{ для любых } \overline{D}(z, t) \subset D, \quad \overline{D}(z, r(z)) \subset D \text{ для всех } z \in D \quad (9)$$

найдется такая функция  $u \in \text{sbh}(D)$  с мерой Рисса  $\nu_u = \nu$ , что

$$u(z) \leq M^{\circ r}(z) \leq M_+^{\circ r}(z) - M_-(z) \quad \text{для всех } z \in D, \quad (10)$$

$$\text{где } M^{\circ r}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(z + r(z)e^{i\theta}) d\theta.$$

Если  $M_+ \in C(D)$ , то функцию  $r$  в (9)–(10) можно выбрать так, что  $u \leq M + 1$  на  $D$ .

**Следствие 1.** Если  $D$  —  $(k + 1)$ -связная область с неполярной границей  $\partial D$ ,  $k < +\infty$ ,  $Z \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$  относительно класса  $\mathcal{V}_b$  из  $\mathbf{z3}$ (8) и  $M_+ \in C(D)$ , то найдется число  $a < k$ , для которого  $Z$  — последовательность нулей для пространства  $\text{Hol}(D, M + a^+ \ln^+ |\cdot|)$  вида (1), где  $a^+ := \max\{0, a\}$  и  $\ln^+ := \max\{0, \ln\}$ , а при  $\text{clos } D \neq \mathbb{C}_\infty$  имеем  $a := 0$ .

Для областей  $D$  из теоремы 2 по следствию 1 имеем  $a^+ = 0$  или  $a = 0$ , что сразу доказывает импликацию  $\mathbf{z3} \Rightarrow \mathbf{z1}$  теоремы 1.

*Доказательство следствия 1.* По определению 1 и условию  $Z \preceq_{S, \nu_b} \nu_M$  с  $M_+ \in C(D)$  из теоремы 3 следует существование функции  $u \in \text{sbh}(D)$  с мерой Рисса  $\nu_u = n_Z$ , удовлетворяющей неравенству  $u \leq M^{*r} \leq M + 1$  на  $D$  при подходящем выборе функции  $r \in C(D)$ . Имеет место представление  $u = \ln |f_Z| + h$ , где  $f_Z \in \text{Hol}(D)$  с  $\text{Zero}_{f_Z} = Z$ , а  $h \in \text{har}(D)$ . В [7, лемма 2.1, (2.15)] доказано, что для областей  $D$  рассматриваемого в следствии 1 типа для любой функции  $h \in \text{har}(D)$  можно подобрать число  $a$  требуемого в следствии 1 вида, для которого найдется функция  $g \in \text{Hol}(D)$  с  $\text{Zero}_g = \emptyset$ , удовлетворяющая неравенству  $\ln |g(z)| \leq h(z) + a^+ \ln^+ |z|$ ,  $z \in D$ . Теперь функция  $f := f_Z g$  с  $\text{Zero}_f = \text{Zero}_{f_Z} = Z$  удовлетворяет неравенству

$$\ln |f| = \ln |f_Z| + \ln |g| \leq \ln |f_Z| + h + a^+ \ln^+ |\cdot| = u + a^+ \ln^+ |\cdot| \leq M + 1 + a^+ \ln^+ |\cdot|$$

на  $D$  и  $Z$  — последовательность нулей для  $\text{Hol}(D, M + a^+ \ln^+ |\cdot|)$ .  $\square$

**Доказательство теоремы 3.** Всегда существует функция  $u_\nu \in \text{sbh}(D)$  с мерой Рисса  $\nu$  [2], [3]. Не умаляя общности, можем считать, что  $0 \in \text{int } S$  и  $u_\nu(0) \neq -\infty$ ,  $M_\pm(0) \neq -\infty$ .

**Определение 2** ([7, 3.1]–[9, определения 1,2]). Мера  $\mu \in \text{Meas}_c^+(D)$  называется *мерой Аренса–Зингера* для точки  $0 \in D$ , если

$$h(0) = \int h \, d\mu \quad \text{для любой функции } h \in \text{har}(D).$$

Класс всех мер Аренса–Зингера для точки  $0 \in D$  обозначаем через  $AS_0(D)$ .

Функция  $V \in \text{sbh}(D \setminus \{0\})$  — *потенциал Аренса–Зингера для точки  $0 \in D$  с единичной нормировкой*, если  $V \equiv 0$  вне некоторого  $S_V \subset \text{clos } S_V \subset D$  и

$$V(z) = -\ln |z| + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (11)$$

Класс всех таких потенциалов Аренса–Зингера для точки  $0 \in D$  с единичной нормировкой (11) обозначаем через  $PAS_0^1(D)$ .

Через  $\text{Meas}_\infty^+(D)$  обозначаем подкласс абсолютно непрерывных мер  $\mu \in \text{Meas}^+(D)$  с плотностью  $t \in C^\infty(D)$ , т. е.  $d\mu = t \, d\lambda$ , где  $\lambda$  — *мера Лебега*.

**Теорема А** ([9, § 1, предложения 1.2–4, теорема двойственности]). *Для любых  $u \in \text{sbh}(D)$  с  $u(0) \neq -\infty$  и с мерой Рисса  $\nu_u = \frac{1}{2\pi} \Delta u$  и потенциала Аренса–Зингера  $V \in PAS_0^1(D)$  имеет место расширенная формула Пуассона–Йенсена*

$$u(0) + \int_D V \, d\nu_u = \int_D u \, d\mu_V, \quad \text{где } \mu_V := \frac{1}{2\pi} \Delta V \in AS_0(D). \quad (12)$$

При этом для любой области  $U_0 \subset \text{clos } U_0 \subset D$  с  $0 \in U_0$  оператор

$$\frac{1}{2\pi} \Delta: V \xrightarrow{(12)} \mu_V$$

определяет биекцию подкласса потенциалов Йенсена

$$\mathcal{V}(U_0) := PAS_0^1(D) \cap \text{har}(U_0 \setminus \{0\}) \cap C^\infty(D \setminus \{0\}) \quad (13V)$$

на подкласс мер Йенсена

$$\mathcal{M}(U_0) := AS_0(D) \cap \text{Meas}_c(D \setminus U_0) \cap \text{Meas}_\infty^+(D). \quad (13M)$$

**Лемма 1.** Для любой области  $U_0$  при

$$0 \in \text{int } S \subset \text{clos } S \subset \text{int } S_0 \subset \text{clos } S_0 \subset U_0 \subset \text{clos } U_0 \subset D$$

найдётся число  $B > 0$ , для которого имеет место включение

$$\mathcal{V}(U_0) \stackrel{(13V)}{\subset} \mathcal{V}_B := \text{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S, S_0; \leq B) \cap C^\infty(D \setminus S). \quad (14)$$

*Доказательство леммы 1.* Для области  $D$  с неполярной границей  $\partial D$  существует функция Грина  $g_D$  [2],[3], и  $V \leq g_D(\cdot, 0)$  для всех  $V \in PAS_0^1(D)$  [5, (2.15)], откуда, ввиду  $0 \in \text{int } S$ , получаем оценку сверху

$$\sup_{S_0 \setminus S} V \leq \sup_{S_0 \setminus S} g_D(\cdot, 0) =: B',$$

где число  $B' > 0$  зависит только от  $S, S_0, D$ . Для  $V \in PAS_0^1$  имеет место представление

$$V(z) \stackrel{(12)}{=} p_{\mu_V}(z) - \ln |z|, \quad z \in D \setminus \{0\}, \quad \text{где } p_{\mu_V}(z) := \int \ln |z - z'| d\mu_V(z'),$$

а  $\mu_V$  из (12) — вероятностная мера [9, предложение 1.4]. Выберем число  $r > 0$  так, что  $2r$  — это минимум двух расстояний: от 0 до  $\partial S$  и от  $S_0$  до  $\partial U_0$ . В [10, предложение 2.6] для усреднений по кругам

$$p_{\mu_V}^{\bullet r}(z) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D}(z,r)} p_{\mu_V}(z') d\lambda(z')$$

получена оценка снизу

$$p_{\mu_V}^{\bullet r}(z) \geq \mu_V(\mathbb{C}) \ln(r/\sqrt{e}) = \ln(r/\sqrt{e}) =: B'' \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Но согласно выбору  $r$  и ввиду  $\text{supp } \mu_V \stackrel{(13M)}{\subset} D \setminus U_0$  из гармоничности потенциала  $p_{\mu_V}$  вне  $\text{supp } \mu_V$  [2], [3] имеем

$$p_{\mu_V}(z) = p_{\mu_V}^{\bullet r}(z) \geq B'' \quad \text{для всех } z \in S_0 \setminus S.$$

Отсюда

$$V(z) \geq B'' + \inf_{z' \in S_0 \setminus S} \ln(1/|z'|) =: B''' \quad \text{для всех } z \in S_0 \setminus S,$$

где по построению  $B''' \in \mathbb{R}$  зависит только от  $r, S, S_0, U_0$ , а стало быть лишь от взаимного расположения точки 0 и множеств  $S, S_0, U_0$ . Таким образом, в соответствии с определением 2 получаем включение (14) с  $B := \max\{B', |B''|\} > 0$ .  $\square$

По определению 1 для произвольно большого числа  $B > 0$ , домножив обе части неравенства (6) на  $B/b > 0$ , в теореме 3 класс  $\mathcal{V}_b$  можно заменить на класс  $\mathcal{V}_B$  из (14) и по лемме 1 из условия  $\nu \stackrel{(6)}{\asymp}_{S, \mathcal{V}_B} \nu_M$  следует  $\nu \stackrel{(14)}{\asymp}_{S, \mathcal{V}(U_0)} \nu_M$ . Последнее по определению 1 аффинного выметания в (6), применяя расширенную формулу Пуассона–Йенсена (12) к  $u_\nu$  и  $M_\pm$ , а также биекцию (13), можно переписать в виде

$$\int u_\nu d\mu \leq \int M d\mu + \underbrace{(BC/b + u(0) - M_+(0) + M_-(0))}_c \quad \text{для всех } \mu \stackrel{(13)}{\in} \mathcal{M}(U_0), \quad (15)$$

где  $c \in \mathbb{R}$  — некоторая постоянная.

**Теорема В** (очень частный случай [6, следствие 8.1] при  $H = \text{har}(D)$ ). *Если для некоторого числа  $c \in \mathbb{R}$  выполнено (15), то для любой функции  $r$ , удовлетворяющей условиям (9), найдутся такие функция  $h \in \text{har}(D)$  и положительная функция  $\hat{r} \leq r$  из класса  $C^\infty(D)$ , что имеет место неравенство*

$$u_\nu + h \leq M^{\otimes \hat{r}} \in C^\infty(D) \quad \text{на } D, \quad (16)$$

где, по построению [6, (8.3–6), (8.10)], [5, (2.18–19)],  $M^{\otimes \hat{r}}(z)$  — «скользящие сжимающиеся» сглаживающие усреднения по некоторым вероятностным мерам

$$\alpha^{(\hat{r}(z))} \in \text{Meas}_\infty^+(\overline{D}(z, \hat{r}(z))),$$

полученным сдвигом, сжатием и нормировкой некоторой единой аппроксимативной единицы  $a \in C^\infty(\mathbb{C})$ , зависящей только от модуля  $|\cdot|$ , с носителем  $\text{supp } a \subset \overline{D}(0, 1)$ .

По теореме В требуемой функцией выбираем

$$u \stackrel{(16)}{:=} u_\nu + h \stackrel{(16)}{\leq} M^{\otimes \hat{r}} = M_+^{\otimes \hat{r}} - M_-^{\otimes \hat{r}} \leq M_+^{\otimes \hat{r}} - M_- \quad \text{на } D, \quad (17)$$

поскольку для  $M_- \in \text{sbh}(D)$  имеем  $M_- \leq M_-^{\otimes \hat{r}}$  на  $D$ . Из  $M_+ \in \text{sbh}(D)$  следует

$$M_+^{\otimes \hat{r}} \stackrel{(10)}{\leq} M_+^{\odot \hat{r}} \leq M_+^{\odot r} \quad \text{на } D,$$

что дает неравенство  $u \leq M_+^{\odot r} - M_-$  на  $D$ . Если  $M_+ \in C(D)$ , то в силу локально равномерной непрерывности функции  $M_+$  функцию  $r$  в ограничениях (9) можно выбрать столь малой, что  $M_+^{\odot r} \leq M + 1$  на  $D$ . Теорема 3 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. Н. Хабибуллин, Э. Б. Хабибуллина, К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // Функц. анализ и его прил. (2018), 3 стр., принято к печати, [arXiv: 1811.01407v1](https://arxiv.org/abs/1811.01407v1)

- [2] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [4] Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, К распределению нулевых множеств голоморфных функций // Функц. анализ и его прил., **52**:1 (2018), 26–42.
- [5] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, К распределению нулевых множеств голоморфных функций. III. Теоремы обращения // Функц. анализ и его прил. (2018), 14 стр., направлено в печать; [arXiv: 1811.10393v1](https://arxiv.org/abs/1811.10393v1).
- [6] Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, Э. Б. Хабибуллина, Порядковые версии Теоремы Хана–Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. (2018), 40 стр., принято к печати, [arxiv: 1812.11058v1](https://arxiv.org/abs/1812.11058v1).
- [7] Б. Н. Хабибуллин, Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Матем. сб., **198**:2 (2007), 121–160.
- [8] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras and Jensen Measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [9] Б. Н. Хабибуллин, Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций // Сиб. матем. журн., **44**:4 (2003), 905–925.
- [10] Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров, Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции // Матем. заметки, **99**:4 (2016), 588–602.

Башкирский государственный университет  
e-mail: khabib-bulat@mail.ru