

К распределению нулевых множеств голоморфных функций. IV. Один критерий*

Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Э. Б. МЕНЬШИКОВА

В более общем виде доказывается анонсированный ранее результат [1, теорема 2].

В соглашениях из [1]–[6] всюду $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация Александрова комплексной плоскости \mathbb{C} , $S \subset \mathbb{C}_\infty$ — борелевское подмножество; $\text{int } S$, $\text{clos } S$ и ∂S — внутренность, замыкание и граница S в \mathbb{C}_∞ .

Далее $\text{Meas}(S)$ — класс вещественных борелевских мер (Радона) на S , или зарядов,

$$\text{Meas}^+(S) := \{\mu \in \text{Meas}(S) : \mu \geq 0\},$$

$\text{Meas}_c^+(S) \subset \text{Meas}^+(S)$ — класс мер с компактным носителем в S , δ_z — вероятностная мера Дирака с носителем $\text{supp } \delta_z = \{z\}$.

Классы $\text{sbh}(S)$, $\text{har}(S)$, $\text{Hol}(S)$ состоят соотв.[†] из субгармонических, гармонических и голоморфных функций в какой-нибудь открытой окрестности множества $S \subset \mathbb{C}_\infty$,

$$\text{Hol}(D, M) := \left\{ f \in \text{Hol}(D) : \sup_D |f| \exp(-M) < +\infty \right\}, \quad (1)$$

где $D \subset \mathbb{C}_\infty$ — область, т. е. открытое связное подмножество,

$$M := M_+ - M_- : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad M_\pm \in \text{sbh}(D), \quad M_\pm \not\equiv -\infty \quad (2)$$

— нетривиальная δ -субгармоническая функция [4, 3.1] с зарядом Рисса

$$\nu_M := \frac{1}{2\pi} \Delta M \in \text{Meas}(D), \quad \Delta — оператор Лапласа. \quad (3)$$

Всюду $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ — последовательность точек в области D без предельных точек в D со считающей мерой

$$n_Z := \sum_k \delta_{z_k}.$$

Выберем

$$\begin{aligned} & \text{число } b > 0, \text{ а также множества} \\ & \emptyset \neq \text{int } S \subset \text{clos } S \subset \text{int } S_0 \subset \text{clos } S_0 \subset D, \text{ где } S \text{ или } \text{int } S_0 \text{ линейно связно.} \end{aligned} \quad (4)$$

Класс вещественных тестовых функций $\text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b)$ состоит из субгармонических функций $v \in \text{sbh}(D \setminus S)$, удовлетворяющих трем условиям [1, (2)]:

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

†сокращение для «соответственно»

- 1) $\lim_{D \ni z' \rightarrow z} v(z') = 0$ для всех $z \in \partial D$;
- 2) существует $S_v \subset \text{clos } S_v \subset D$, для которого $v \geq 0$ на $D \setminus S_v$;
- 3) $\sup_{S_0 \setminus S} |v| \leq b$.

Рассматриваем и *финитный* вблизи ∂D подкласс введенного класса тестовых вещественных функций $\text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b)$ (ср. с [5, (1.12)])

$$\text{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b) := \{v \in \text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b) : v \equiv 0 \text{ вне некоторого } S_v \subset \text{clos } S_v \subset D\}.$$

Определение 1 (*аффинного выметания* [5, определение 1], [6, определение 7.1, (7.11)]). Пусть $S \subset D$, \mathcal{V} — некоторый класс *полу*непрерывных *сверху* функций

$$v: D \setminus S \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}. \quad (5)$$

Рассмотрим заряды $\nu, \mu \in \text{Meas}(D)$. Пишем $\nu \preceq_{S, \nu} \mu$ (соотв. $Z \preceq_{S, \nu} \mu$), если для некоторого числа $C \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus S} v \, d\nu &\leq \int_{D \setminus S} v \, d\mu + C \\ \left(\text{соотв. } \sum_{z_k \in D \setminus S} v(z_k) \stackrel{(3)}{=} \int_{D \setminus S} v \, dn_Z \leq \int_{D \setminus S} v \, d\mu + C \right) &\text{ для всех } v \stackrel{(5)}{\in} \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 1 (критерий последовательности нулей для $\text{Hol}(D, M)$). Пусть D односвязная область в \mathbb{C}_∞ и на ∂D более одной точки или D двусвязная в \mathbb{C}_∞ и на ∂D более двух точек или D конечносвязная в \mathbb{C}_∞ с $\text{clos } D \neq \mathbb{C}_\infty$. Пусть функция $M_+ \stackrel{(2)}{\in} \text{sbh}(D)$ непрерывна, т. е. $M_+ \stackrel{(2)}{\in} C(D)$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.

z1. Z — последовательность нулей для $\text{Hol}(D, M)$, т. е. существует $f \in \text{Hol}(D, M)$ с последовательностью нулей Zero_f , перенумерованной с учётом кратности, со считающей мерой $n_{\text{Zero}_f} \stackrel{(3)}{=} n_Z$ (пишем $\text{Zero}_f = Z$).

z2. Для любых объектов из (4) имеем $Z \stackrel{(6)}{\preceq}_{S, \nu_b} \nu_M$ относительно класса

$$\mathcal{V}_b := \text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b). \quad (7)$$

z3. Существуют объекты из (4), для которых $Z \stackrel{(6)}{\preceq}_{S, \nu_b} \nu_M$ относительно класса

$$\mathcal{V}_b := \text{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b) \cap C^\infty(D \setminus S), \quad (8)$$

где $C^\infty(D \setminus S)$ — класс бесконечно дифференцируемых функций в окрестности $D \setminus S$.

Импликация $\mathbf{z1} \Rightarrow \mathbf{z2}$ для произвольной области $D \subset \mathbb{C}^n$ с субгармонической функцией M доказана в [1, теорема 1]. Более общая, чем [1, теорема 1], версия при $n = 1$ для произвольной уже δ -субгармонической функцией $M \neq \pm\infty$ — это

Теорема 2. В условиях (4) пусть $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса $\nu_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u$. Если $u \leq M$ на D , то $\nu_u \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$ относительно класса $\mathcal{V}_b \stackrel{(7)}{:=} \text{sbh}_0^\pm(D \setminus S, S_0; \leq b)$.

Доказательство теоремы 2 опускаем, поскольку оно по сути повторяет [2, доказательство теорема 1]. Отметим лишь, что предварительно необходимо выбрать точку $z_0 \in \text{int } S$, в которой $u(z_0) \neq -\infty$ и $M_\pm(z_0) \neq -\infty$, а также оперировать вместо неравенства $u \leq M$ неравенством $u + M_- \leq M_+$, где в обеих частях субгармонические функции. Роль $\ln |f|$ из [1, доказательство теоремы 1] будет играть функция $u + M_-$ с M_+ вместо M . Тогда $\nu_{u+M_-} \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_{M_+}$, откуда по определению 1 следует $\nu_u \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$.

Из утверждения $\mathbf{z1}$ для последовательности $Z \subset D$ существует $f \in \text{Hol}(D)$ с $\text{Zero}_f = Z$, для которой $|f| \leq \exp M$ на D . При $u := \ln |f| \leq M$ на D имеем

$$\nu_u = \frac{1}{2\pi}\Delta u = \frac{1}{2\pi}\Delta \ln |f| = n_Z$$

и по теореме 2 получаем $n_Z \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$, что по определению 1 означает $Z \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$. Таким образом, импликация $\mathbf{z1} \Rightarrow \mathbf{z2}$ доказана.

Импликация $\mathbf{z2} \Rightarrow \mathbf{z3}$ очевидна, поскольку класс тестовых функций \mathcal{V}_b из $\mathbf{z2}$ (7) включает в себя класс тестовых функций \mathcal{V}_b из $\mathbf{z3}$ (8).

Далее для простоты $\infty \notin D$, т.е. $D \subset \mathbb{C}$. Для точки $z \in \mathbb{C}$ и числа $t > 0$ через $D(z, t) \subset \mathbb{C}$ обозначаем открытый круг с центром z радиуса t , $\overline{D}(z, t) := \text{clos } D(z, t)$. Для доказательства импликации $\mathbf{z3} \Rightarrow \mathbf{z1}$ теоремы 1 будет использованы следующие

Теорема 3. Пусть в условиях (4) без линейной связности граница ∂D неполярная, а также задана мера $\nu \in \text{Meas}^+(D)$. Если $\nu \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$ относительно класса тестовых функций \mathcal{V}_b из $\mathbf{z3}$ (8), то для любой положительной функции $r: D \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничениями

$$\inf_{\overline{D}(z, t)} r > 0 \text{ для любых } \overline{D}(z, t) \subset D, \quad \overline{D}(z, r(z)) \subset D \text{ для всех } z \in D \quad (9)$$

найдется такая функция $u \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса $\nu_u = \nu$, что

$$u(z) \leq M^{\circ r}(z) \leq M_+^{\circ r}(z) - M_-(z) \quad \text{для всех } z \in D, \quad (10)$$

$$\text{где } M^{\circ r}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(z + r(z)e^{i\theta}) d\theta.$$

Если $M_+ \in C(D)$, то функцию r в (9)–(10) можно выбрать так, что $u \leq M + 1$ на D .

Следствие 1. Если D — $(k + 1)$ -связная область с неполярной границей ∂D , $k < +\infty$, $Z \stackrel{(6)}{\prec}_{S, \mathcal{V}_b} \nu_M$ относительно класса \mathcal{V}_b из $\mathbf{z3}$ (8) и $M_+ \in C(D)$, то найдется число $a < k$, для которого Z — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(D, M + a^+ \ln^+ |\cdot|)$ вида (1), где $a^+ := \max\{0, a\}$ и $\ln^+ := \max\{0, \ln\}$, а при $\text{clos } D \neq \mathbb{C}_\infty$ имеем $a := 0$.

Для областей D из теоремы 2 по следствию 1 имеем $a^+ = 0$ или $a = 0$, что сразу доказывает импликацию $\mathbf{z3} \Rightarrow \mathbf{z1}$ теоремы 1.

Доказательство следствия 1. По определению 1 и условию $Z \preceq_{S, \nu_b} \nu_M$ с $M_+ \in C(D)$ из теоремы 3 следует существование функции $u \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса $\nu_u = n_Z$, удовлетворяющей неравенству $u \leq M^{*r} \leq M + 1$ на D при подходящем выборе функции $r \in C(D)$. Имеет место представление $u = \ln |f_Z| + h$, где $f_Z \in \text{Hol}(D)$ с $\text{Zero}_{f_Z} = Z$, а $h \in \text{har}(D)$. В [7, лемма 2.1, (2.15)] доказано, что для областей D рассматриваемого в следствии 1 типа для любой функции $h \in \text{har}(D)$ можно подобрать число a требуемого в следствии 1 вида, для которого найдется функция $g \in \text{Hol}(D)$ с $\text{Zero}_g = \emptyset$, удовлетворяющая неравенству $\ln |g(z)| \leq h(z) + a^+ \ln^+ |z|$, $z \in D$. Теперь функция $f := f_Z g$ с $\text{Zero}_f = \text{Zero}_{f_Z} = Z$ удовлетворяет неравенству

$$\ln |f| = \ln |f_Z| + \ln |g| \leq \ln |f_Z| + h + a^+ \ln^+ |\cdot| = u + a^+ \ln^+ |\cdot| \leq M + 1 + a^+ \ln^+ |\cdot|$$

на D и Z — последовательность нулей для $\text{Hol}(D, M + a^+ \ln^+ |\cdot|)$. \square

Доказательство теоремы 3. Всегда существует функция $u_\nu \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν [2], [3]. Не умаляя общности, можем считать, что $0 \in \text{int } S$ и $u_\nu(0) \neq -\infty$, $M_\pm(0) \neq -\infty$.

Определение 2 ([7, 3.1]–[9, определения 1,2]). Мера $\mu \in \text{Meas}_c^+(D)$ называется *мерой Аренса–Зингера* для точки $0 \in D$, если

$$h(0) = \int h \, d\mu \quad \text{для любой функции } h \in \text{har}(D).$$

Класс всех мер Аренса–Зингера для точки $0 \in D$ обозначаем через $AS_0(D)$.

Функция $V \in \text{sbh}(D \setminus \{0\})$ — *потенциал Аренса–Зингера для точки $0 \in D$ с единичной нормировкой*, если $V \equiv 0$ вне некоторого $S_V \subset \text{clos } S_V \subset D$ и

$$V(z) = -\ln |z| + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (11)$$

Класс всех таких потенциалов Аренса–Зингера для точки $0 \in D$ с единичной нормировкой (11) обозначаем через $PAS_0^1(D)$.

Через $\text{Meas}_\infty^+(D)$ обозначаем подкласс абсолютно непрерывных мер $\mu \in \text{Meas}^+(D)$ с плотностью $t \in C^\infty(D)$, т. е. $d\mu = t \, d\lambda$, где λ — *мера Лебега*.

Теорема А ([9, § 1, предложения 1.2–4, теорема двойственности]). *Для любых $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(0) \neq -\infty$ и с мерой Рисса $\nu_u = \frac{1}{2\pi} \Delta u$ и потенциала Аренса–Зингера $V \in PAS_0^1(D)$ имеет место расширенная формула Пуассона–Йенсена*

$$u(0) + \int_D V \, d\nu_u = \int_D u \, d\mu_V, \quad \text{где } \mu_V := \frac{1}{2\pi} \Delta V \in AS_0(D). \quad (12)$$

При этом для любой области $U_0 \subset \text{clos } U_0 \subset D$ с $0 \in U_0$ оператор

$$\frac{1}{2\pi} \Delta: V \xrightarrow{(12)} \mu_V$$

определяет биекцию подкласса потенциалов Йенсена

$$\mathcal{V}(U_0) := PAS_0^1(D) \cap \text{har}(U_0 \setminus \{0\}) \cap C^\infty(D \setminus \{0\}) \quad (13V)$$

на подкласс мер Йенсена

$$\mathcal{M}(U_0) := AS_0(D) \cap \text{Meas}_c(D \setminus U_0) \cap \text{Meas}_\infty^+(D). \quad (13M)$$

Лемма 1. Для любой области U_0 при

$$0 \in \text{int } S \subset \text{clos } S \subset \text{int } S_0 \subset \text{clos } S_0 \subset U_0 \subset \text{clos } U_0 \subset D$$

найдётся число $B > 0$, для которого имеет место включение

$$\mathcal{V}(U_0) \stackrel{(13V)}{\subset} \mathcal{V}_B := \text{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S, S_0; \leq B) \cap C^\infty(D \setminus S). \quad (14)$$

Доказательство леммы 1. Для области D с неполярной границей ∂D существует функция Грина g_D [2],[3], и $V \leq g_D(\cdot, 0)$ для всех $V \in PAS_0^1(D)$ [5, (2.15)], откуда, ввиду $0 \in \text{int } S$, получаем оценку сверху

$$\sup_{S_0 \setminus S} V \leq \sup_{S_0 \setminus S} g_D(\cdot, 0) =: B',$$

где число $B' > 0$ зависит только от S, S_0, D . Для $V \in PAS_0^1$ имеет место представление

$$V(z) \stackrel{(12)}{=} p_{\mu_V}(z) - \ln |z|, \quad z \in D \setminus \{0\}, \quad \text{где } p_{\mu_V}(z) := \int \ln |z - z'| d\mu_V(z'),$$

а μ_V из (12) — вероятностная мера [9, предложение 1.4]. Выберем число $r > 0$ так, что $2r$ — это минимум двух расстояний: от 0 до ∂S и от S_0 до ∂U_0 . В [10, предложение 2.6] для усреднений по кругам

$$p_{\mu_V}^{\bullet r}(z) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D}(z,r)} p_{\mu_V}(z') d\lambda(z')$$

получена оценка снизу

$$p_{\mu_V}^{\bullet r}(z) \geq \mu_V(\mathbb{C}) \ln(r/\sqrt{e}) = \ln(r/\sqrt{e}) =: B'' \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Но согласно выбору r и ввиду $\text{supp } \mu_V \stackrel{(13M)}{\subset} D \setminus U_0$ из гармоничности потенциала p_{μ_V} вне $\text{supp } \mu_V$ [2], [3] имеем

$$p_{\mu_V}(z) = p_{\mu_V}^{\bullet r}(z) \geq B'' \quad \text{для всех } z \in S_0 \setminus S.$$

Отсюда

$$V(z) \geq B'' + \inf_{z' \in S_0 \setminus S} \ln(1/|z'|) =: B''' \quad \text{для всех } z \in S_0 \setminus S,$$

где по построению $B''' \in \mathbb{R}$ зависит только от r, S, S_0, U_0 , а стало быть лишь от взаимного расположения точки 0 и множеств S, S_0, U_0 . Таким образом, в соответствии с определением 2 получаем включение (14) с $B := \max\{B', |B''|\} > 0$. \square

По определению 1 для произвольно большого числа $B > 0$, домножив обе части неравенства (6) на $B/b > 0$, в теореме 3 класс \mathcal{V}_b можно заменить на класс \mathcal{V}_B из (14) и по лемме 1 из условия $\nu \stackrel{(6)}{\asymp}_{S, \mathcal{V}_B} \nu_M$ следует $\nu \stackrel{(14)}{\asymp}_{S, \mathcal{V}(U_0)} \nu_M$. Последнее по определению 1 аффинного выметания в (6), применяя расширенную формулу Пуассона–Йенсена (12) к u_ν и M_\pm , а также биекцию (13), можно переписать в виде

$$\int u_\nu d\mu \leq \int M d\mu + \underbrace{(BC/b + u(0) - M_+(0) + M_-(0))}_c \quad \text{для всех } \mu \stackrel{(13)}{\in} \mathcal{M}(U_0), \quad (15)$$

где $c \in \mathbb{R}$ — некоторая постоянная.

Теорема В (очень частный случай [6, следствие 8.1] при $H = \text{har}(D)$). *Если для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$ выполнено (15), то для любой функции r , удовлетворяющей условиям (9), найдутся такие функция $h \in \text{har}(D)$ и положительная функция $\hat{r} \leq r$ из класса $C^\infty(D)$, что имеет место неравенство*

$$u_\nu + h \leq M^{\otimes \hat{r}} \in C^\infty(D) \quad \text{на } D, \quad (16)$$

где, по построению [6, (8.3–6), (8.10)], [5, (2.18–19)], $M^{\otimes \hat{r}}(z)$ — «скользящие сжимающиеся» сглаживающие усреднения по некоторым вероятностным мерам

$$\alpha^{(\hat{r}(z))} \in \text{Meas}_\infty^+(\overline{D}(z, \hat{r}(z))),$$

полученным сдвигом, сжатием и нормировкой некоторой единой аппроксимативной единицы $a \in C^\infty(\mathbb{C})$, зависящей только от модуля $|\cdot|$, с носителем $\text{supp } a \subset \overline{D}(0, 1)$.

По теореме В требуемой функцией выбираем

$$u \stackrel{(16)}{:=} u_\nu + h \stackrel{(16)}{\leq} M^{\otimes \hat{r}} = M_+^{\otimes \hat{r}} - M_-^{\otimes \hat{r}} \leq M_+^{\otimes \hat{r}} - M_- \quad \text{на } D, \quad (17)$$

поскольку для $M_- \in \text{sbh}(D)$ имеем $M_- \leq M_-^{\otimes \hat{r}}$ на D . Из $M_+ \in \text{sbh}(D)$ следует

$$M_+^{\otimes \hat{r}} \stackrel{(10)}{\leq} M_+^{\odot \hat{r}} \leq M_+^{\odot r} \quad \text{на } D,$$

что дает неравенство $u \leq M_+^{\odot r} - M_-$ на D . Если $M_+ \in C(D)$, то в силу локально равномерной непрерывности функции M_+ функцию r в ограничениях (9) можно выбрать столь малой, что $M_+^{\odot r} \leq M + 1$ на D . Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. Н. Хабибуллин, Э. Б. Хабибуллина, К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // Функц. анализ и его прил. (2018), 3 стр., принято к печати, [arXiv: 1811.01407v1](https://arxiv.org/abs/1811.01407v1)

- [2] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [4] Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, К распределению нулевых множеств голоморфных функций // Функц. анализ и его прил., **52**:1 (2018), 26–42.
- [5] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, К распределению нулевых множеств голоморфных функций. III. Теоремы обращения // Функц. анализ и его прил. (2018), 14 стр., направлено в печать; [arXiv: 1811.10393v1](https://arxiv.org/abs/1811.10393v1).
- [6] Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, Э. Б. Хабибуллина, Порядковые версии Теоремы Хана–Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. (2018), 40 стр., принято к печати, [arxiv: 1812.11058v1](https://arxiv.org/abs/1812.11058v1).
- [7] Б. Н. Хабибуллин, Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Матем. сб., **198**:2 (2007), 121–160.
- [8] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras and Jensen Measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [9] Б. Н. Хабибуллин, Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций // Сиб. матем. журн. , **44**:4 (2003), 905–925.
- [10] Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров, Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции // Матем. заметки, **99**:4 (2016), 588–602.

Башкирский государственный университет
e-mail: khabib-bulat@mail.ru