

Sur la “solution analytique générale” d’une équation différentielle chaotique du troisième ordre *

T.-L. Yee†, R. Conte‡, and M. Musette‡

†Service de physique de l’état condensé, CEA–Saclay
F–91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
Yee@drecam.saclay.cea.fr, Conte@drecam.saclay.cea.fr

‡Dienst Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel
Pleinlaan 2, B–1050 Brussels, Belgium
MMusette@vub.ac.be

Reçu le 5 décembre 2002; accepté le 10 février 2003

Abstract

Résumé. Même si elle est non-intégrable, une équation différentielle peut néanmoins admettre des solutions particulières globalement analytiques. Sur l’exemple du système dynamique de Kuramoto et Sivashinsky, génériquement chaotique et d’un grand intérêt physique, nous passons en revue diverses méthodes, toutes fondées sur la structure des singularités, permettant de caractériser la solution analytique qui dépend du plus grand nombre possible de constantes d’intégration.

English abstract. Even if it is nonintegrable, a differential equation may nevertheless admit particular solutions which are globally analytic. On the example of the dynamical system of Kuramoto and Sivashinsky, which is generically chaotic and presents a high physical interest, we review various methods, all based on the structure of singularities, allowing us to characterize the analytic solution which depends on the largest possible number of constants of integration.

Mots clefs : ondes solitaires, équations de Briot et Bouquet, Nevanlinna, algorithme LLL, équation de Kuramoto et Sivashinsky, équation de Ginzburg et Landau complexe cubique unidimensionnelle, genre, troncature.

PACS 1995 : 02.30.-f 02.60.-x 02.70.-c 05.45.+b 47.27.-i 82.40.-g

Contents

1	Situation du problème	3
2	Suppression locale de la contribution chaotique	3
3	Sur la suppression globale de la contribution chaotique	4
4	Rappel sur la classe d’équations $P(u^{(n)}, u) = 0$	5
5	Solutions de codimension non nulle	6

*IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics (de Gruyter, Berlin, 2003). Journées de calcul formel, IRMA, Strasbourg, 21–22 mars 2002. Correspondance : RC. S2002/070. nlin.PS/0302056

6	Vers une approche numérique de la solution elliptique	7
6.1	Premier test d'ellipticité	7
6.2	Deuxième test d'ellipticité	8
6.3	Détermination des degrés de la sous-équation	10
7	Approches analytiques	10
7.1	Équation de Monge-Ampère équivalente	10
7.2	Construction de la sous-équation par l'algorithme LLL	11
7.3	Construction de la sous-équation par la série de Laurent	11
8	Conclusion	12

1 Situation du problème

D'après un résultat classique [28], un système différentiel ne peut présenter un comportement chaotique que si son ordre égale au moins trois. D'autre part, malgré l'opposition intuitive entre chaos et analyticité, il n'est pas interdit à un système génériquement chaotique de posséder des solutions particulières globalement analytiques, la seule impossibilité étant que le nombre de constantes d'intégration ne peut évaluer l'ordre. Le but de cet article est de passer en revue les diverses méthodes connues permettant de caractériser (idéalement d'exhiber) cette solution analytique, forcément particulière, qui dépend du nombre maximal possible de constantes d'intégration. Convenons de l'appeler *solution analytique générale*, par opposition à la *solution générale* dont l'expression analytique n'existe pas.

L'exemple physique optimal pour illustrer ces méthodes est à notre avis l'équation de Ginzburg et Landau cubique unidimensionnelle (CGL3)

$$i\psi_t + p\psi_{xx} + q|\psi|^2\psi - i\gamma A = 0, \quad pq\gamma \neq 0, \quad (\psi, p, q) \in \mathcal{C}, \quad \gamma \in \mathcal{R}, \quad (1)$$

pour les raisons suivantes,

1. elle est génériquement chaotique [21],
2. elle admet une limite intégrable $\Im(p) = \Im(q) = \gamma = 0$ (équation de Schrödinger nonlinéaire (NLS)) dont tous les éléments d'intégrabilité sont connus analytiquement,
3. les phénomènes physiques qu'elle modélise sont très importants : propagation du signal dans une fibre optique [1], intermittence spatio-temporelle en turbulence, supraconductivité, etc.

Nous nous contenterons d'étudier ici une équation plus simple, celle de Kuramoto et Sivashinsky (KS), déduite de celle pour la phase $\varphi = \arg \psi$ du champ ψ de CGL3 en prenant une certaine limite [25, 19],

$$\varphi_t + \nu\varphi_{xxxx} + b\varphi_{xxx} + \mu\varphi_{xx} + \varphi\varphi_x = 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}, \quad (\nu, b, \mu) \in \mathcal{R}, \quad \nu \neq 0. \quad (2)$$

Sa réduction en onde propagative

$$\varphi(x, t) = c + u(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (3)$$

$$E(u, \xi) \equiv \nu u'''' + bu'' + \mu u' + \frac{u^2}{2} + A = 0, \quad (\nu, b, \mu) \in \mathcal{R}, \quad \nu \neq 0, \quad (4)$$

où A est une constante d'intégration, a également un comportement chaotique [21], et elle dépend de deux paramètres sans dimension, $b^2/(\mu\nu)$ et $\nu A/\mu^3$. Nous noterons désormais x pour ξ . Le problème à résoudre est le suivant.

Problème. Trouver l'expression explicite de la "solution analytique générale" (définition *supra*) de l'EDO (4).

La motivation vient de ce que cette solution (pour CGL3 et donc pour KS) est "observée" sous forme de texture bien définie, tant dans des simulations numériques que dans de véritables expériences physiques [11].

2 Suppression locale de la contribution chaotique

Comptons d'abord le nombre (nécessairement inférieur à trois) de constantes arbitraires dans la solution analytique générale. La recherche d'un comportement local algébrique au voisinage d'une singularité mobile x_0 (mobile signifie : qui dépend des conditions initiales),

$$u \sim_{x \rightarrow x_0} u_0 \chi^p, \quad u_0 \neq 0, \quad \chi = x - x_0, \quad (5)$$

conduit à la série de Laurent

$$u^{(0)} = 120\nu\chi^{-3} - 15b\chi^{-2} + \left(\frac{60\mu}{19} - \frac{15b^2}{76\nu}\right)\chi^{-1} + O(\chi^0), \quad (6)$$

d'où sont absentes deux des trois constantes arbitraires. Celles-ci apparaissent en perturbation [4],

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots, \quad (7)$$

où le petit paramètre ε ne figure pas dans l'EDO (4). L'équation linéarisée en $u^{(0)}$

$$\left(\nu \frac{d^3}{dx^3} + b \frac{d^2}{dx^2} + \mu \frac{d}{dx} + u^{(0)}\right) u^{(1)} = 0, \quad (8)$$

est alors du type de Fuchs au voisinage de $x = x_0$, avec pour équation indicelle ($q = -6$ désigne le degré de singularité du premier membre E de (4))

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \chi^{-j-q} (\nu \partial_x^3 + u_0 \chi^p) \chi^{j+p} \quad (9)$$

$$= \nu(j-3)(j-4)(j-5) + 120\nu = \nu(j+1)(j^2 - 13j + 60) \quad (10)$$

$$= \nu(j+1) \left(j - \frac{13 + i\sqrt{71}}{2}\right) \left(j - \frac{13 - i\sqrt{71}}{2}\right) = 0. \quad (11)$$

La représentation locale de la solution générale,

$$\begin{aligned} u(x_0, \varepsilon c_+, \varepsilon c_-) &= 120\nu\chi^{-3} \{ \text{Taylor}(\chi) \\ &\quad + \varepsilon [c_+ \chi^{(13+i\sqrt{71})/2} \text{Taylor}(\chi) \\ &\quad + c_- \chi^{(13-i\sqrt{71})/2} \text{Taylor}(\chi)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \}, \end{aligned}$$

où "Taylor" désigne des séries convergentes de χ , dépend bien de trois constantes arbitraires $(x_0, \varepsilon c_+, \varepsilon c_-)$ (l'indice de Fuchs -1 ne représente qu'une translation de x_0). Le branchement mobile dense provenant des deux indices irrationnels caractérise [31] le comportement chaotique, et l'unique moyen de l'éliminer est d'exiger $\varepsilon c_+ = \varepsilon c_- = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$, restreignant ainsi à un seul arbitraire la partie analytique de la solution. Le problème est donc de trouver une expression compacte pour la série de Laurent (6).

3 Sur la suppression globale de la contribution chaotique

Par élimination de la constante mobile x_0 (donc de $x - x_0$) entre la série de Laurent (6) et sa dérivée, la solution analytique générale satisfait à une EDO autonome d'ordre un,

$$F(u', u) = 0, \quad (12)$$

que nous appellerons *sous-équation* de (4), puisque cette dernière en est une conséquence différentielle.

Trouver la solution analytique générale équivaut alors à trouver une sous-équation autonome d'ordre un. En effet, si l'on admet que F est polynomiale et que sa solution générale est uniforme, alors

1. (Hermite [32, Vol. II, §139]) le genre de la courbe algébrique $F = 0$ est zéro ou un,

2. (Briot et Bouquet [24, pages 58–59]) sa forme nécessaire est

$$F(u, u') \equiv \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{2m-2k} a_{j,k} u^j u'^k = 0, \quad a_{0,m} = 1, \quad (13)$$

où m est un entier positif et les $a_{j,k}$ sont des constantes,

3. (Briot et Bouquet) la solution est, pour le genre zéro, une fraction rationnelle de e^{ax} ou de x (a désignant une constante); pour le genre un, une fonction elliptique.

Dans les deux cas, il existe un algorithme, implanté en Maple par Mark van Hoeij [12], qui donne l'expression explicite de la solution.

Malheureusement, à notre connaissance, on ne sait pas effectuer l'élimination de $x - x_0$ entre la série de Laurent et sa dérivée qui, si elle était possible, fournirait (12).

4 Rappel sur la classe d'équations $P(u^{(n)}, u) = 0$

P désignant un polynôme de deux variables à coefficients complexes, la classe d'équations autonomes

$$P(u^{(n)}, u) = 0, \quad (14)$$

indépendantes des dérivées d'ordre 2 à $n - 1$ inclus, a été classiquement beaucoup étudiée. Soit W la classe de fonctions d'une variable complexe x

$$W := \{\text{rationnel}(x), \text{rationnel}(e^{ax}), \text{elliptique}(x)\}, \quad (15)$$

où a est une constante complexe. C'est en fait la classe des fonctions elliptiques et de leurs dégénérescences, car

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{rationnel}(e^{ax}) = \lim_{a \rightarrow 0} \text{rationnel}((e^{ax} - 1)/a) = \text{rationnel}(x). \quad (16)$$

Les résultats connus sont les suivants.

1. (Briot et Bouquet) Pour $n = 1$, si la solution est uniforme, alors elle est dans W .
2. (Picard) Pour $n = 2$, toute solution méromorphe est dans W .
3. (Eremenko [7]) Si n est impair, si le genre de la courbe algébrique $P = 0$ est nul, et s'il existe une solution particulière méromorphe qui possède au moins un pôle, alors cette solution est dans W .

Ce troisième cas (qui se démontre par la théorie de Nevanlinna) s'applique à (4) pour $b = \mu = 0$, la solution est alors connue [8]

$$b = 0, \mu = 0 : u = -60\nu\wp'(x - x_0, 0, g_3), \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{A}{1080\nu^2}, \quad (17)$$

\wp représentant la fonction elliptique de Weierstrass, et il en existe même une extrapolation de codimension un [16]

$$b^2 - 16\mu\nu = 0 : u = -60\nu\wp' - 15b\wp - \frac{b\mu}{4\nu}, \quad g_2 = \frac{\mu^2}{12\nu^2}, \quad g_3 = \frac{13\mu^3 + \nu A}{1080\nu^3}. \quad (18)$$

Notre problème revient à extrapoler cette solution pour une valeur arbitraire de $b^2/(\mu\nu)$.

5 Solutions de codimension non nulle

Elles appartiennent toutes (du moins celles qui sont connues) à la classe W , Eq. (15). L'unique solution connue de codimension trois est rationnelle,

$$b = 0, \mu = 0, A = 0 \quad u = 120\nu(x - x_0)^{-3}. \quad (19)$$

On connaît six solutions de codimension deux [17, 15], toutes rationnelles en e^{kx} ,

$$u = \frac{5}{2}bk^2 - \frac{13b^3}{32 \times 19\nu^2} + \frac{7\mu b}{4 \times 19\nu} + \left(\frac{60}{19}\mu - 30\nu k^2 - \frac{15b^2}{4 \times 19\nu} \right) \frac{k}{2} \tanh \frac{k}{2}(x - x_0) - 15b \left(\frac{k}{2} \tanh \frac{k}{2}(x - x_0) \right)^2 + 120\nu \left(\frac{k}{2} \tanh \frac{k}{2}(x - x_0) \right)^3, \quad (20)$$

les valeurs permises figurant dans la Table 1.

Table 1: Les six solutions connues de codimension deux de (4). Elles ont toutes la forme (20).

$b^2/(\mu\nu)$	$\nu A/\mu^3$	$\nu k^2/\mu$
0	$-4950/19^3, 450/19^3$	$11/19, -1/19$
$144/47$	$-1800/47^3$	$1/47$
$256/73$	$-4050/73^3$	$1/73$
16	$-18, -8$	$1, -1$

Enfin, l'unique solution connue de codimension un est elliptique, cf. (18), et c'est une extrapolation de la dernière ligne de la Table 1.

Une belle propriété commune à toutes ces solutions est d'admettre la représentation

$$u = \mathcal{D} \text{Log } \sigma, \quad \mathcal{D} = 60\nu \frac{d}{dx^3} + 15b \frac{d}{dx^2} + \frac{15(16\mu\nu - b^2)}{76\nu} \frac{d}{dx}, \quad (21)$$

où σ est une fonction entière dont l'EDO est facile à construire.

Avant de rechercher plus avant la solution inconnue de codimension zéro, il convient de se poser la question si elle est ou non dans la classe W , c.à.d. si elle est elliptique.

On pourrait craindre en effet que cette classe W soit insuffisante, au vu d'une EDO qui ne diffère de (4) que par le terme uu' [29, 26],

$$E \equiv -u''' + 9ku'' + (a_1u - 26k^2)u' - 2a_1ku^2 + 24k^2u, \quad (22)$$

et dont la solution sort de la classe W ,

$$u = \frac{12}{a_1} e^{2kx} \wp \left(\frac{e^{kx} - 1}{k} - X_0, g_2, g_3 \right), \quad (X_0, g_2, g_3) \text{ arbitraires.} \quad (23)$$

Une solution dans cette nouvelle classe est exclue pour (4), car l'EDO d'ordre un résultant de l'élimination de X_0 entre (23) et sa dérivée,

$$(u' - 2ku)^2 - 4u^3 + e^{4kx} g_2 u + e^{6kx} g_3 = 0, \quad (24)$$

n'est autonome que pour la dégénérescence rationnelle $g_2 = g_3 = 0$.

6 Vers une approche numérique de la solution elliptique

À partir de l'unique élément d'information que constitue la série de Laurent (6), nous allons définir plusieurs approches numériques pour tester la validité de l'hypothèse elliptique (appartenance à la classe W). L'outil naturel est celui des approximants de Padé (AP) [2].

Étant donné les N premiers termes d'une série de Taylor en $x = 0$,

$$S_N = \sum_{j=0}^N c_j x^j, \quad (25)$$

l'approximant de Padé $[L, M]$ de la série est défini comme l'unique fraction rationnelle

$$[L, M] = \frac{\sum_{l=0}^L a_l x^l}{\sum_{m=0}^M b_m x^m}, \quad b_0 = 1, \quad (26)$$

satisfaisant à la condition

$$S_N - [L, M] = \mathcal{O}(x^{N+1}), \quad L + M = N. \quad (27)$$

L'extension aux séries de Laurent ne présente pas de difficulté. En particulier, les AP sont exacts sur les fractions rationnelles dès que L et M sont suffisamment grands.

Le calcul préalable d'un grand nombre (environ 200) de termes de la série de Laurent se fait par un algorithme linéaire, la seule difficulté, aisée à surmonter, étant de ne jamais engendrer de termes qui s'avéreront inutiles. Il importe également de calculer les c_j , puis les (a_l, b_m) , sur \mathcal{Q} , jamais sur \mathcal{R} , à cause d'importantes compensations. C'est pour cela que nous avons dû écarter le programme *pade* de *Numerical recipes* [27], qui engendre des doublets de Froissart [9, 10] indésirables (couples d'un zéro et d'un pôle très proches, ces couples se répartissant sur un cercle sans définir de coupure comme ce serait le cas s'il ne s'agissait pas d'erreurs numériques). La fonction *pade* du langage formel Maple [22] est en revanche tout à fait adaptée.

Remarque. Il est possible d'éviter l'étape de calcul des AP et d'obtenir directement et rapidement [30] les valeurs numériques des zéros et des pôles du Padé $[L, M]$.

6.1 Premier test d'ellipticité

La structure des pôles et des zéros des AP de (6) caractérise la classe de fonctions à laquelle appartient sa somme inconnue.

Une somme elliptique est caractérisée par une double infinité de pôles et de zéros situés aux nœuds d'un réseau doublement périodique, une somme rationnelle en e^{ax} , avec a complexe, par une simple infinité de pôles et de zéros, une somme rationnelle en x par un nombre fini de pôles et de zéros, etc. C'est pour tester les structures doublement périodiques que l'on a besoin d'un grand nombre de termes dans la série de Laurent.

Pour tous les cas de solution connue ((20), (18)), en choisissant pour les constantes fixes (ν, b, μ, A) des valeurs rationnelles, le résultat est conforme aux espérances, voir Fig. 1. Pour plusieurs cas génériques de valeurs de $b^2/(\mu\nu)$ (par exemple $b^2/(\mu\nu) = 4, 8$, Fig. 2), nous trouvons une solide indication numérique que les textures observées sont toutes doublement périodiques, ce qui est la signature des fonctions elliptiques. Dans tous les cas, connus et inconnus, il est aisé de compter le nombre (commun) de zéros et de pôles par période, et les calculs indiquent que ce nombre serait égal à trois.

Remarque. La connaissance du nombre et des positions des zéros et des pôles d'une période permet la détermination numérique des invariants g_2 et g_3 .

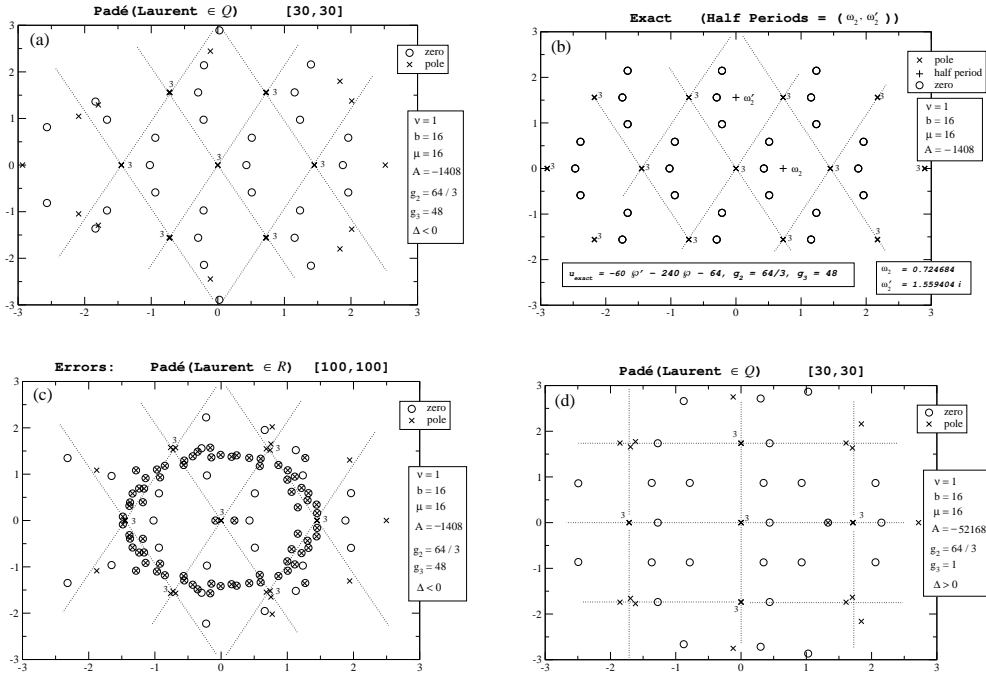


Figure 1: Plan complexe x du seul cas elliptique connu ($b^2 = 16\mu\nu$, $A = \text{arb}$). La structure des zéros (symbole 0) et des pôles (symbole X) doit être doublement périodique, avec trois zéros simples et un pôle triple par parallélogramme période. Figure (d) : $(\nu, b, \mu, A) = (1, 16, 16, -52168)$, calcul de l'AP [30, 30] sur \mathcal{Q} . Les trois autres figures sont tracées pour $(\nu, b, \mu, A) = (1, 16, 16, -1408)$, donc $(g_2, g_3) = (64/3, 48)$. Figure (b) : emplacements exacts des zéros et des pôles, calculés à partir de la solution exacte (18). Figure (c) : zéros et pôles de l'AP [100, 100] calculé sur \mathcal{R} , montrant l'accumulation des doublets de Froissart sur le cercle unité (échelles différentes sur les deux axes). Figure (a) : zéros et pôles de l'AP [30, 30] calculé sur \mathcal{Q} . Dans tous les cas, on discerne nettement les trois zéros simples et le pôle triple de chaque période.

6.2 Deuxième test d'ellipticité

Si la solution u est elliptique, alors, d'après un résultat classique, il existe deux fractions rationnelles R_1, R_2 telles que $u = R_1(\wp) + R_2(\wp) \wp'$, plus précisément

$$u(x, g_2, g_3) = \underbrace{\frac{\text{Poly}_{N_1}(\wp)}{\text{Poly}_D(\wp)}}_{\text{partie paire}} + \frac{\text{Poly}_{N_2}(\wp)}{\text{Poly}_D(\wp)} \sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}, \quad (28)$$

où Poly_D désigne un polynôme de degré D .

En vue d'une recherche directe de la solution sous la forme (28), il est en principe possible de calculer numériquement les degrés N_1, N_2, D des fractions rationnelles de \wp , en remplaçant le plan complexe de x par celui de $\wp(x)$, de la manière suivante.

Tout d'abord, la nécessité d'une seule variable complexe dans les AP oblige à éliminer \wp' , donc à introduire le branchement algébrique indésirable $\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$. Un moyen simple de le supprimer est alors, puisque \wp est une fonction paire, de se restreindre à la partie paire de la série de Laurent $u(\chi = x - x_0)$,

$$u^{\text{paire}} = -15b\chi^{-2} + \frac{b(56\mu\nu - 13b^2)}{19 \times 32\nu^2} - \frac{b(10\mu\nu - 3b^2)^2}{19^2 \times 64\nu^4} \chi^2 + \mathcal{O}(\chi^4), \quad (29)$$

d'inverser [14, vol. II, p. 527] la série de Laurent \wp de x ,

$$\wp(x, g_2, g_3) = x^{-2} + \frac{g_2}{20} x^2 + \frac{g_3}{28} x^4 + \mathcal{O}(x^6) \quad (30)$$

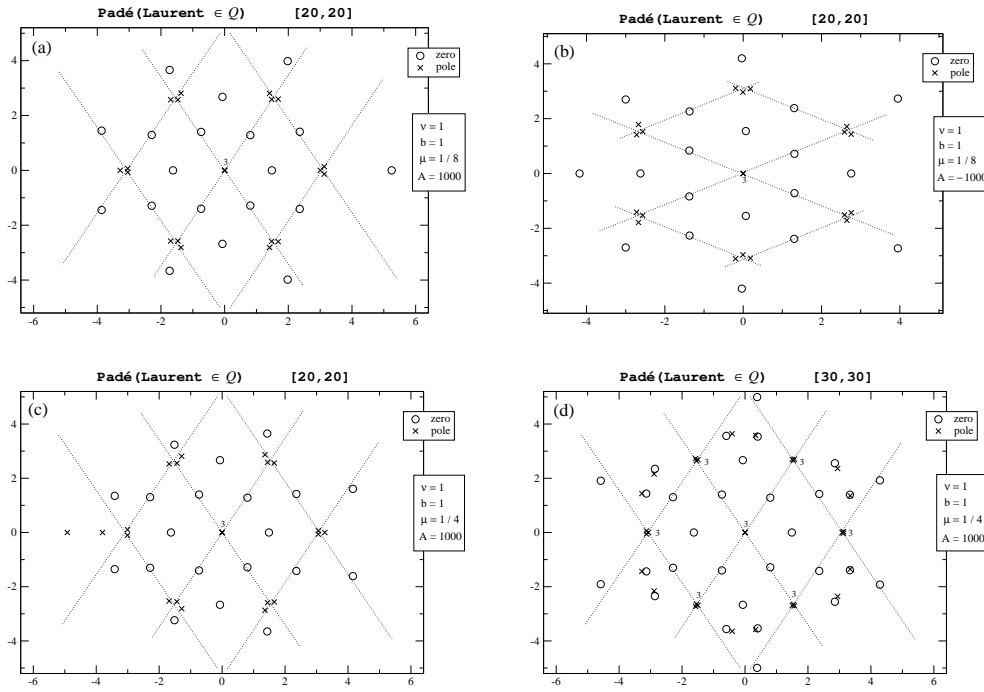


Figure 2: Plan complexe x pour les valeurs $b^2/(\mu\nu) = 4$ et 8 (cas génériques inconnus) et des AP calculés sur \mathcal{Q} . Fig. (a), $(\nu, b, \mu) = (1, 1, 1/8)$, $A = 1000$. Fig. (b), $(\nu, b, \mu) = (1, 1, 1/8)$, $A = -1000$. Figs. (c) et (d), $(\nu, b, \mu, A) = (1, 1, 1/4, 1000)$, pour $[L, M] = [20, 20]$ (Fig. (c)) et $[30, 30]$ (Fig. (d)). La structure est, avec une bonne précision, doublement périodique à trois zéros simples et un pôle triple par période.

en la série de Laurent x^2 de \wp ,

$$\begin{aligned}
x^2 = \wp^{-1} & \left[1 + \frac{g_2}{20} \wp^{-2} + \frac{g_3}{28} \wp^{-3} + \frac{7g_2^2}{1200} \wp^{-4} + \frac{29g_2g_3}{3080} \wp^{-5} \right. \\
& + \left(\frac{11g_2^3}{12480} + \frac{5g_3^2}{1274} \right) \wp^{-6} + \frac{167g_2^2g_3}{73920} \wp^{-7} \\
& \left. + \left(\frac{77g_2^4}{509184} + \frac{669g_2g_3^2}{340340} \right) \wp^{-8} + \mathcal{O}(\wp^{-9}) \right], \quad (31)
\end{aligned}$$

puis de composer les deux séries (29) et (31) pour obtenir

$$\begin{aligned}
w^{\text{paire}} = & -15b\wp + \frac{b(56\mu\nu - 13b^2)}{19 \times 32\nu^2} + \left(\frac{3bg_2}{4} - \frac{b(10\mu\nu - 3b^2)^2}{19^2 \times 64\nu^4} \right) \wp^{-1} \\
& + \mathcal{O}(\wp^{-2}). \quad (32)
\end{aligned}$$

La question est alors de tester si cette série (32), dont les coefficients dépendent de $(\nu, b, \mu, A, g_2, g_3)$, a bien pour somme une fraction rationnelle

$$w^{\text{paire}}(x, g_2, g_3) = \frac{\text{Poly}_{N_1}(\wp)}{\text{Poly}_D(\wp)}. \quad (33)$$

La difficulté provient de la nécessité de donner, dans la série (32), des valeurs numériques, de préférence rationnelles, à (g_2, g_3) avant de pouvoir calculer les zéros et les pôles des AP. Puisque le parallélogramme période du plan x est déjà déterminé, il permet de calculer des valeurs approchées (complexes) de (g_2, g_3) . Il importe donc d'étudier la sensibilité du résultat (valeurs de N_1, D) aux valeurs de (g_2, g_3) , et cette sensibilité ne peut être testée que sur l'unique solution elliptique connue (18). La Figure 3 montre la structure des AP de (32) dans le plan complexe \wp pour $b^2 = 16\mu\nu$ et pour un choix de (g_2, g_3) voisin de celui de ce cas.

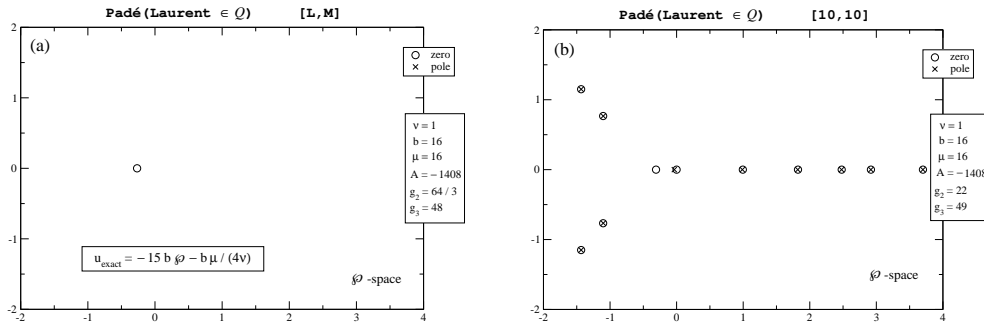


Figure 3: Plan complexe \wp de la partie paire de la solution u pour $b^2/(\mu\nu) = 16$, $A = -1408$, ce qui définit par (18) les valeurs $g_2 = 64/3, g_3 = 48$. Dans la figure (a), $(\nu, b, \mu, A, g_2, g_3) = (1, 16, 16, -1408, 64/3, 48)$, tout AP $[L, M]$ est exact car calculé sur \mathcal{Q} , la figure contient donc l'unique zéro $\wp = -\mu/(60\nu)$ et elle n'a aucun pôle. Dans la figure (b), où les valeurs de (g_2, g_3) sont choisies rationnelles et légèrement différentes des valeurs exactes, $(\nu, b, \mu, A, g_2, g_3) = (1, 16, 16, -1408, 22, 49)$, l'AP $[10, 10]$, calculé sur \mathcal{Q} , fait constater 10 quasi-compensations d'un pôle par un zéro.

6.3 Détermination des degrés de la sous-équation

Suivant une suggestion de Belabas faite lors de la conférence, les degrés de la courbe algébrique (13) pourraient se calculer par une technique de Padé, comme suit. À partir de la série de Laurent (6), on construit d'abord une autre série de Laurent à pôle simple, par exemple $u'/u = \text{Laurent}(x-x_0)$, on l'inverse en $x-x_0 = \text{Laurent}(u'/u)$, et on la substitue dans la série $u = \text{Laurent}(x-x_0)$. La série résultante $u = \text{Laurent}(u'/u)$, qui réalise sous forme locale l'élimination de $x-x_0$ entre u et u' , est alors analysée par Padé. Du branchement algébrique ainsi trouvé, il devrait être possible de déduire le degré en U de la courbe algébrique $G(U, V) = 0$, avec $U = u, V = u'/u$, donc les degrés de (13).

7 Approches analytiques

L'étude numérique précédente semble conclure à la nature elliptique de la solution cherchée. Nous présentons maintenant brièvement trois méthodes analytiques susceptibles de fournir les coefficients de la sous-équation (12). Si de plus celle-ci est supposée algébrique et à solution générale uniforme, alors elle a la forme nécessaire (13).

7.1 Équation de Monge-Ampère équivalente

La fonction inconnue de deux variables $F(u, u')$ qui définit la sous-équation d'ordre un (12) satisfait à une équation aux dérivées partielles très simple, obtenue par élimination de u'' et u''' entre (4) et les deux équations

$$\frac{d}{dx} F(u(x), u'(x)) = 0, \quad (34)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} F(u(x), u'(x)) = 0. \quad (35)$$

Dans la notation classique

$$\begin{aligned} X = u, \quad Y = u', \quad P = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial Y}, \\ R = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}, \quad S = \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}, \quad T = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

c'est une équation de Monge-Ampère qui s'écrit

$$\nu \frac{Y^2(-Q^2R + 2PQS - P^2T) + YP^2Q}{Q^3} - bY \frac{P}{Q} + \mu Y + \frac{X^2}{2} + A = 0. \quad (37)$$

Notre problème équivaut alors à en trouver une solution particulière à zéro paramètre qui soit polynomiale. Ce nouveau problème pourrait n'être pas plus simple que l'original, car la méthode des caractéristiques est inapplicable puisque l'équation (37) hérite de la nature chaotique de KS. En particulier nous n'avons pas réussi à obtenir les degrés de cette solution polynomiale, si elle existe.

7.2 Construction de la sous-équation par l'algorithme LLL

Il existe une méthode [20, 13], héritée de la cryptographie, qui fournit *en nombres entiers* les coefficients de (13) pour m donné (et $a_{0,m}$ non normalisé à un). Connue sous le nom d'*algorithme de réduction du réseau* (lattice reduction algorithm) ou d'*algorithme LLL*, elle reçoit en entrée l'entier m , la suite des inconnues $a_{j,k}$ de (13), et L valeurs numériques $(u_i, u'_i), i = 1, \dots, L$ (donc dans \mathcal{R} et non pas dans \mathcal{Q}) de la somme des séries de Laurent u et u' aux points $x_i - x_0, i = 1, \dots, L$. En sortie, si L est suffisamment grand devant le nombre $(m+1)^2$ d'inconnues $a_{j,k}$, elle exhibe en un temps polynomial une suite d'entiers $a_{j,k}$, par résolution du système linéaire homogène surdéterminé

$$\forall l = 1, \dots, L : \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{2m-2k} a_{j,k} u_l^j u_l'^k = 0. \quad (38)$$

Si les entiers ainsi trouvés sont tous nuls, il faut augmenter m et recommencer. Nous n'avons pas encore mis cette méthode en œuvre car celle de la section suivante semble beaucoup plus prometteuse.

7.3 Construction de la sous-équation par la série de Laurent

Deux d'entre nous ont récemment proposé [23] une méthode analytique permettant de construire la sous-équation (13) à partir de la série de Laurent (6). L'algorithme est le suivant.

1. Choisir un entier positif m et définir l'EDO de Briot and Bouquet (13). Elle contient $(m+1)^2 - 1$ constantes inconnues $a_{j,k}$.
2. Calculer J termes de la série de Laurent, où J est légèrement supérieur à $(m+1)^2 - 1$,

$$u = \chi^p \left(\sum_{j=0}^J u_j \chi^j + \mathcal{O}(\chi^{j+1}) \right), \quad (39)$$

avec dans le cas de KS $p = -3$.

3. Exiger que la série de Laurent satisfasse à l'EDO de Briot and Bouquet, c.à.d. demander l'annulation identique de la série de Laurent de $F(u, u')$ à l'ordre J

$$F \equiv \chi^D \left(\sum_{j=0}^J F_j \chi^j + \mathcal{O}(\chi^{j+1}) \right), \quad D = m(p-1), \quad \forall j : F_j = 0. \quad (40)$$

S'il n'existe pas de solution pour $a_{j,k}$, augmenter m et revenir à l'étape 1.

4. Pour toute solution, intégrer l'EDO autonome d'ordre un (13).

Le cœur de la méthode est la troisième étape, où le système de $J + 1$ équations $F_j = 0$ aux $(m + 1)^2 - 1$ inconnues $a_{j,k}$ est *linéaire* and *surdéterminé*, donc très facile à résoudre.

Quant à la quatrième étape, elle est résolue par le progiciel *algebra* [12], qui met en œuvre des algorithmes de Poincaré.

Dans le cas de l'équation (4) étudiée ici, du fait de la valeur $p = -3$, la valeur minimale de m est $m = 3$, ce qui correspond à 15 inconnues $a_{j,k}$ et même à 10 inconnues seulement, à cause de la règle de sélection supplémentaire $m(p - 1) \leq jp + k(p - 1)$, qui provient du degré de singularité $p = -3$ de u . Ces dix coefficients sont déterminés par le système de Cramer défini par les dix équations $F_j = 0$, $j = 0 : 6, 8, 9, 12$. Le système résiduel, qui est non-linéaire et surdéterminé aux inconnues fixes (ν, b, μ, A) , a pour PGCD $b^2 - 16\mu\nu$ (cf. (18)), ce qui définit la solution de codimension un,

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{\mu\nu} &= 16, \left(u' + \frac{b}{2\nu}u_s\right)^2 \left(u' - \frac{b}{4\nu}u_s\right) + \frac{9}{40\nu} \left(u_s^2 + \frac{60\mu^3}{\nu} + \frac{10A}{3}\right)^2 = 0, \\ u_s &= u + \frac{3b\mu}{2\nu}. \end{aligned} \quad (41)$$

Après division par ce PGCD, le système restant aux inconnues (ν, b, μ, A) admet exactement quatre solutions (il est suffisant d'arrêter la série à $j = 16$ pour obtenir ce résultat),

$$\begin{aligned} b &= 0, \\ \left(u' + \frac{180\mu^2}{19^2\nu}\right)^2 \left(u' - \frac{360\mu^2}{19^2\nu}\right) + \frac{9}{40\nu} \left(u^2 + \frac{30\mu}{19}u' - \frac{30^2\mu^3}{19^2\nu}\right)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$b = 0, u'^3 + \frac{9}{40\nu} \left(u^2 + \frac{30\mu}{19}u' + \frac{30^2\mu^3}{19^3\nu}\right)^2 = 0, \quad (43)$$

$$\frac{b^2}{\mu\nu} = \frac{144}{47}, u_s = u - \frac{5b\mu}{47\nu}, \left(u' + \frac{b}{4\nu}u_s\right)^3 + \frac{9}{40\nu}u_s^4 = 0, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{\mu\nu} &= \frac{256}{73}, u_s = u - \frac{45b\mu}{584\nu}, \\ \left(u' + \frac{b}{8\nu}u_s\right)^2 \left(u' + \frac{b}{2\nu}u_s\right) + \frac{9}{40\nu} \left(u_s^2 + \frac{5b^3}{1024\nu^2}u_s + \frac{5b^2}{128\nu}u'\right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

À l'étape 4, on trouve alors la valeur un pour le genre de (41), et la valeur zéro pour celui de (42)–(45), puis les expressions (18) et (20) pour les solutions.

Avec la valeur minimale $m = 3$, on retrouve donc tous les résultats connus. Le calcul pour $m \geq 4$ est actuellement en cours.

8 Conclusion

L'étude par approximants de Padé semble conforter la nature probablement elliptique de l'unique solution analytique de codimension nulle de l'EDO chaotique (4). Parmi les autres pistes, mi-analytiques, mi-numériques, qu'il serait possible de mettre en œuvre, il en existe une particulièrement intéressante car constructive, c'est celle d'obtention de la sous-équation par la série de Laurent. Son seul inconvénient est l'absence de borne supérieure pour le degré m , ce qui contraint à de volumineux calculs qui sont encore en cours.

Remerciements

Nous remercions les organisateurs et l'IRMA pour l'invitation à donner cette conférence, Karim Belabas pour plusieurs suggestions fructueuses, ainsi que Jean-Robert Burgan, Chiang Yik-man, Pierre Moussa, Jean-Pierre Ramis, Simon Ruijnesaars et Jean

Thomann pour des discussions enrichissantes. La facilité de programmation du langage de calcul formel AMP [6] a constitué une aide précieuse.

T.-L. Yee remercie la Fondation Croucher de Hong-Kong, et MM le CEA pour leur soutien financier.

References

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, 3rd edition (Academic press, Boston, 2001).
- [2] C. Brezinski, J. van Iseghem, Padé Approximations, 47–222, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. III”, eds. P.G. Ciarlet and J.-L. Lions (North-Holland, Amsterdam, 1994).
- [3] R. Conte (ed.), *The Painlevé property, one century later*, 810 pages, CRM series in mathematical physics (Springer, New York, 1999).
- [4] R. Conte, A. P. Fordy, and A. Pickering, A perturbative Painlevé approach to nonlinear differential equations, *Physica D* **69** (1993) 33–58.
- [5] R. Conte and M. Musette, Painlevé analysis and Bäcklund transformation in the Kuramoto–Sivashinsky equation, *J. Phys. A* **22** (1989) 169–177.
- [6] J.-M. Drouffe, AMP reference manual, version 9 (1993), SPhT, CE Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex.
- [7] A. E. Eremenko, Meromorphic solutions of equations of Briot-Bouquet type, *Teor. Funktsii, Funktsional’nyi Analiz i Prilozhen. Vyp.* **16** (1982) 48–56 [English : *Amer. Math. Soc. Transl.* **133** (1986) 15–23].
- [8] J.-D. Fournier, E. A. Spiegel, and O. Thual, Meromorphic integrals of two non-integrable systems, *Nonlinear dynamics*, 366–373, ed. G. Turchetti (World Scientific, Singapore, 1989).
- [9] J. Gilewicz and M. Pindor, Padé approximants and noise: a case of geometric series, *J. Comput. Appl. Math.* **87** (1997) 199–214.
- [10] J. Gilewicz and M. Pindor, Padé approximants and noise: rational functions, *J. Comput. Appl. Math.* **105** (1999) 285–297.
- [11] M. van Hecke, C. Storm, and W. van Saarloos, Sources, sinks and wavenumber selection in coupled CGL equations and experimental implications for counter-propagating wave systems, *Physica D* **133** (1999) 1–47. patt-sol/9902005.
- [12] Mark van Hoeij, progiciel “algcurves”, Maple V (1997). <http://www.math.fsu.edu/~hoeij/algcurves.html>
- [13] A. Joux and J. Stern, Lattice reduction: a toolbox for the cryptanalyst, *J. Cryptology* **11** (1998) 161–185.
- [14] D. Knuth, *The art of computer programming*, 3rd ed. (Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1998).
- [15] N. A. Kudryashov, Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics, *Prikladnaia Matematika i Mekhanika* **52** (1988) 465–470 [English : *Journal of applied mathematics and mechanics* **52** (1988) 361–365].
- [16] N. A. Kudryashov, Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Phys. Lett. A* **147** (1990) 287–291.
- [17] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Prog. Theor. Phys.* **55** (1976) 356–369.
- [18] J. Lega, Thèse (Université de Nice, 28 mars 1989).
- [19] J. Lega, Traveling hole solutions of the complex Ginzburg-Landau equation: a review, *Physica D* **152–153** (2001) 269–287.

- [20] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr., and Lovász, Factoring polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.* **261** (1982) 515–534.
- [21] P. Manneville, *Dissipative structures and weak turbulence* (Academic Press, Boston, 1990). Enlarged French translation: *Structures dissipatives, chaos et turbulence* (Aléa-Saclay, Gif-sur-Yvette, 1991).
- [22] Maple, <http://www.maplesoft.com/products/Maple8/index.shtml>
- [23] M. Musette and R. Conte, Analytic solitary waves of nonintegrable equations, 9 pages, *Physica D* (2003), accepté pour publication. S2002/069. nlin.PS/0302051
- [24] P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* (Leçons de Stockholm, 1895) (Hermann, Paris, 1897). Réimpression, *Oeuvres de Paul Painlevé*, vol. I (Éditions du CNRS, Paris, 1973).
- [25] Y. Pomeau and P. Manneville, Stability and fluctuations of a spatially periodic flow, *J. Physique Lett.* **40** (1979) L609–L612.
- [26] A. V. Porubov, Periodical solution to the nonlinear dissipative equation for surface waves in a convecting liquid layers, *Phys. Lett. A* **211** (1996) 391–394.
- [27] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes in C*, second edition (Cambridge university press, Cambridge, 1992).
- [28] D. Ruelle, *Hasard et chaos* (Odile Jacob, Paris, 1991).
- [29] A. M. Samsonov, Nonlinear strain waves in elastic waveguides, *Nonlinear waves in solids*, 349–382 eds. A. Jeffrey and J. Engelbrecht (Springer-Verlag, Wien, 1994).
- [30] J. Thomann et J.-C. Yakoubsohn, communication privée (2002).
- [31] O. Thual and U. Frisch, Natural boundary in the Kuramoto model, *Combustion and nonlinear phenomena*, 327–336, eds. P. Clavin, B. Larrouturou, and P. Pelcé (Éditions de physique, Les Ulis, 1986).
- [32] G. Valiron, *Cours d'analyse mathématique*, 2ième éd. (Masson, Paris, 1950).